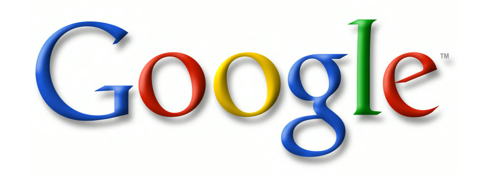
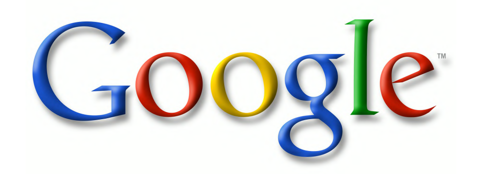

Google




HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
VE
RI
TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE

Bestimmung der Definitionsgleichungen
aller endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen in der Ebene.

Inaugural-Dissertation

der

Hohen Philosophischen Facultät

der

Universität Leipzig

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

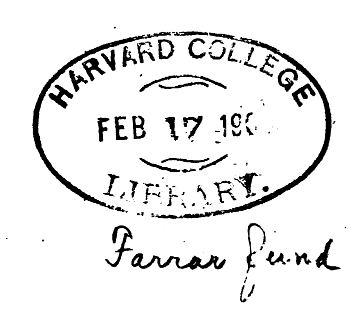
Arthur Graham Hall

aus Michigan, U. S. A.

Leipzig

Druck von Breitkopf & Härtel

1902.


HARVARD COLLEGE
FEB 17 190
LIBRARY.

Inhalts-Verzeichnis.

§ I.

Einleitung.

Die folgende Arbeit beschäftigt sich mit einer ganz bestimmten Aufgabe in der Theorie der Transformationsgruppen. Um das Verständnis der Umstände und Bedeutung dieser Aufgabe zu fördern, wäre es vorteilhaft, zunächst die angewendeten Hauptbegriffe und Hauptsätze aus der Theorie der Transformationsgruppen zusammenzufassen. Die Beweise dieser und der später benutzten Sätze unterdrücke ich. Man findet sie in den an den betreffenden Stellen citirten Schriften von Sophus Lie, dem Urheber der Theorie der Transformationsgruppen, und von seinem Mitarbeiter, Herrn Professor Dr. Friedrich Engel, dem ich für die Anregung zu diesen Untersuchungen, sowie für zahlreiche gütige Unterstützungen zu grösstem Dank verpflichtet bin. Die folgende Zusammenfassung der Grundsätze der Gruppentheorie ziehe ich aus dem ersten Abschnitt der »Theorie der Transformationsgruppen, unter Mitwirkung von Dr. Fr. Engel bearbeitet von Sophus Lie«, Leipzig, Teubner, 1888—1893.

Eine Schar von Transformationen

$$x'_i = f_i(x_1 \dots x_n, \quad a_1 \dots a_r) \qquad (i = 1, \dots n)$$

der Variabeln $x_1 \dots x_n$ bildet eine endliche, continuirliche Transformationsgruppe, wenn zwei Transformationen der Schar nach einander ausgeführt wieder eine Transformation der Schar ergeben. Sind die Parameter $a_1 \dots a_r$ alle wesentlich, so nennen wir die Gruppe r-gliedrig.

Jede eingliedrige Gruppe, welche die identische Transformation enthält, ist von einer ganz bestimmten infinitesimalen Transformation von der Gestalt

$$x'_i = x_i + \xi_i(x_1 \dots x_n)\,\delta t \qquad (i = 1, \dots n),$$

oder

$$X(f) = \sum_1^n{}^i \xi_i(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

erzeugt. Ist es nicht möglich, r Constanten $e_1 \dots e_r$ so zu wählen, dass der Ausdruck $e_1 X_1(f) + \cdots + e_r X_r(f)$ identisch verschwindet, heissen die r infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \dots X_r(f)$ von einander unabhängig.

Eine Schar von r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \dots X_r(f)$ bildet eine r-gliedrige Gruppe dann und nur dann, wenn zwischen den $X(f)$ Beziehungen von der Form

$$(X_i X_k) \equiv X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = \sum_1^r {}^s c_{iks} X_s(f) \qquad (i, k = 1, \dots r)$$

bestehen. Diese Gruppe enthält auch alle aus den $X_1(f) \dots X_r(f)$ linear oder durch Klammeroperationen abgeleiteten infinitesimalen Transformationen,

$$e_i X_i(f) + e_k X_k(f)$$

und

$$(X_i X_k) \qquad (i, k = 1, \dots r).$$

Die Transformation

$$e_1 X_1(f) + \cdots + e_r X_r(f)$$

nennen wir die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe.

Zwei r-gliedrige Transformationsgruppen heissen ähnlich, wenn die eine bei Einführung geeigneter Variabeln in die andere übergeht.

Ein analytischer Ausdruck gestattet eine Transformation, wenn er sich bei der betreffenden Transformation nicht ändert. Eine Funktion $\varphi(x_1 \dots x_n)$ bleibt bei einer infinitesimalen Transformation invariant, wenn der Ausdruck $X(\varphi)$ identisch verschwindet. Also sind die Invarianten einer r-gliedrigen Gruppe von infinitesimalen Transformationen die Lösungen des Systems von partiellen Differentialgleichungen

$$X_1(f) = 0, \quad \dots \quad X_r(f) = 0.$$

Ist

$$X(f) = \sum_1^r {}^k e_k X_k(f) = \sum_1^n {}^i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

die allgemeine infinitesimale Transformation einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe, so ist

$$\xi_i = \sum_1^r {}^k e_k \xi_{ik}(x_1 \dots x_n) \qquad (i = 1, \dots n).$$

Differentiiren wir die letzteren Gleichungen hinreichend oft, und eliminiren wir aus den erhaltenen Gleichungen die Constanten $e_1 \dots e_r$, so bekommen wir ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\sum_1^n{}^i A_{hi}(x_1 \ldots x_n)\, \xi_i + \sum_{i,k}^{1\ldots n} B_{hik}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \cdots = 0$$

$$(h = 1,\ 2,\ \ldots),$$

die die Grössen $\xi_1 \ldots \xi_n$ und damit die Gruppe selbst vollständig definiren, und die Lie die Definitionsgleichungen der betreffenden Gruppe nennt*). Umgekehrt definirt ein System linearer, homogener Differentialgleichungen von der oben geschriebenen Form eine endliche, continuirliche Transformationsgruppe, wenn seine allgemeinsten Lösungen $\xi_1 \ldots \xi_n$ nur von willkürlichen Constanten abhängen, und wenn sich aus irgend zwei Lösungssystemen $\xi_{11} \ldots \xi_{n1}$, $\xi_{12} \ldots \xi_{n2}$ immer ein neues System von der Form

$$\sum_1^n{}^i \left(\frac{\partial f_{j2}}{\partial x_i} - \xi_{i2} \frac{\partial \xi_{j1}}{\partial x_i} \right) \qquad (j = 1, \ldots n)$$

zusammensetzen lässt. Hängt das allgemeinste Lösungssystem nicht nur von willkürlichen Constanten ab, sondern auch von willkürlichen Functionen, so ist die definirte Gruppe von infinitesimalen Transformationen eine unendliche.

Im folgenden betrachten wir nur die endlichen Gruppen.

Um eine Gruppe wirklich und vollständig zu bestimmen, müssen diese Differentialgleichungen ein unbeschränkt integrables System bilden, d. h. es darf nicht möglich sein, durch Differentiation und Combination derselben eine neue Differentialgleichung von derselben oder niedrigerer Ordnung zu erhalten. Ist das System nicht unbeschränkt integrabel, so müssen wir alle möglichen, vermittels der angedeuteten Operationen abgeleiteten, neuen Differentialgleichungen hinzufügen.

Als Beispiel führen wir diese Methode bei der Gruppe der Euklidischen Bewegungen in der Ebene aus. Diese Gruppe ist dreigliedrig und besteht aus den drei unabhängigen, infinitesimalen Transformationen

$$p,\ q,\ yp - xq.$$

Die allgemeine Transformation der Gruppe ist also

$$X(f) = (\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_3 y) \frac{\partial f}{\partial x} (\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 x) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

*) Lie, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab Bd. 3, Christiania, 1878 und Bd. 8, 1883; Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger, 1883, Nr. 12.

Durch einmalige Differentiation der Gleichungen

$$\xi = \mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_3 y\,, \quad \eta = \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3 x$$

bekommen wir die Werte

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\,\mathfrak{e}_3\,, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \mathfrak{e}_3\,, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0\,.$$

Das System der Definitionsgleichungen der Gruppe entsteht also aus den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 0\,. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem ist ferner unbeschränkt integrabel, da keine neue Gleichung nullter oder erster Ordnung sich vermittelst weiterer Differentiation und Combination dieser drei erhalten lässt.

Ferner ist es leicht zu verificiren, dass aus zwei Lösungssystemen $\xi_1\,\eta_1$, $\xi_2\,\eta_2$ immer ein drittes System von der erwähnten Form ableitbar ist.

Lie hat viele Gruppen in seinen Abhandlungen »Ueber unendliche Gruppen« discutirt. Natürlich ist es unmöglich, die ganze Menge von Transformationsgruppen in dieser Weise zu erschöpfen. Da es gewisse Normalformen giebt, denen alle Gruppen einer gegebenen n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ähnlich sind, so sind alle Gruppen der betreffenden Mannigfaltigkeit durch Berechnung der Definitionsgleichungen dieser Normalformen in einem gewissen Sinne bestimmt.

In seiner Habilitationsschrift hat Engel eine allgemeinere Methode aufgestellt, die von ihm und Lie entwickelt und angewendet wurde. Lie hat auch bewiesen, dass diese Methode die Definitionsgleichungen aller Gruppen liefert*). Engel hat später einen neuen Beweis dafür gegeben, und die Methode in seinen Vorlesungen dargestellt**). Vermittelst dieser Methode erhält man nicht nur die Definitionsgleichungen der Normalformen, sondern die allgemeine

*) Lie, Archiv for Math. og Nat. 1878 und 1883; Christ. Forh. 1883; Leipziger Berichte Bd. 43, 1891.

**) Engel, »Über die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen«, Habilitationsschrift Leipzig 1885; Math. Ann. Bd. 27, 1886; Leipziger Berichte Bd. 46, 1894, S. 25—29.

Form der Definitionsgleichungen von allen mit diesen Normalformen oder Typen ähnlichen Gruppen. Man bekommt dann durch Specialisirung die Definitionsgleichungen irgend einer vorgelegten Gruppe.

Die Methode, welche ich in der vorliegenden Arbeit zu der Berechnung der Definitionsgleichungen aller endlichen continuirlichen Gruppen von infinitesimalen Punkttransformationen in der Ebene anwende, ist kurz die folgende:

Vorgelegt seien

$$X_k f = \xi_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (k = 1, \ldots \varrho)$$

die infinitesimalen Transformationen einer ϱ-gliedrigen Gruppe. Dann ist

$$\bar{X} f = \sum_1^\varrho {}^k \, \mathfrak{e}_k X_k f$$

die allgemeine Transformation der Gruppe, und also

$$\bar{\xi} = \sum_1^\varrho {}^k \, \mathfrak{e}_k \xi_k, \quad \bar{\eta} = \sum_1^\varrho {}^k \, \mathfrak{e}_k \eta_k .$$

Bilden wir nun alle partiellen Ableitungen der $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ nach x und y bis zu einer genügend hohen Ordnung, so haben wir n_0 Grössen nullter Ordnung ($\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ selbst), n_1 Grössen erster Ordnung, n_2 Grössen zweiter Ordnung, u. s. w. Jetzt können wir etwa m_0 von diesen Grössen nullter Ordnung durch die $n_0 - m_0$ übrigen ausdrücken, dann m_1 der Ableitungen erster Ordnung durch die $n_1 - m_1$ übrigen Grössen erster Ordnung und die von nullter Ordnung, dann m_2 von zweiter Ordnung durch die $n_2 - m_2$ übrigen von zweiter und die von niedrigerer Ordnung, u. s. w. Fahren wir in dieser Weise fort, so werden wir endlich eine solche bestimmte Ordnung s erreichen, dass $m_s = n_s$ ist. Ferner ist immer $m_\sigma = n_\sigma$ für $\sigma \gtreqless s$. Die sämtlichen so gefundenen Relationen sind die verlangten Definitionsgleichungen der Gruppe. Die Grösse s hängt von der Natur und der Zahl der vorgelegten Grössen $\xi_1 \ldots \xi_\varrho$, $\eta_1 \ldots \eta_\varrho$ ab, oder, was dasselbe ist, von der Beschaffenheit der allgemeinen Grössen $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ und von der Zahl ϱ, der Anzahl der darin enthaltenen unbestimmten Constanten $\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_\varrho$; und zwar ist

$$\sum_0^s {}^h (n_h - m_h) = \varrho .$$

Wir kehren nun zu der vorgelegten Gruppe

$$X_k f = \xi_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (k = 1 \ldots \varrho)$$

zurück. Betrachten wir jetzt x, y als Functionen zweier neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, so erweitern wir die Transformation

$$X_k f = 0 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + 0 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + \xi_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (k = 1 \ldots \varrho)$$

bis zu der früher gefundenen s-ten Ordnung vermittelst der Formel

$$\frac{\delta}{\delta t}(z_{uv}) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z_u}{\partial t}\right)$$

$$\left(z = x \text{ oder } y,\ v = \mathfrak{x} \text{ oder } \mathfrak{y},\ z_u = \frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial \mathfrak{x}^\mu \partial \mathfrak{y}^\nu}\right).$$

In gewöhnlicher Weise bekommen wir alle unabhängigen Invarianten dieser Gruppe bis zur s-ten Ordnung als Lösungen des entsprechenden Systems partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Es seien $I_1 \ldots I_l$ die sämtlichen unabhängigen Invarianten. Bei Einführung neuer Veränderlichen vermöge irgend einer Transformation geht die Gruppe Xf in eine mit ihr ähnliche Gruppe über, und zu gleicher Zeit das Invariantensystem $I_1 \ldots I_l$ in das Invariantensystem $I_1' \ldots I_l'$ dieser neuen Gruppe. Wählen wir die ganz beliebige Transformation

$$\mathfrak{X} f = \xi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + 0 \frac{\partial f}{\partial x} + 0 \frac{\partial f}{\partial y},$$

die x und y gar nicht ändert, und erweitern wir dieselbe durch die Formel

$$\frac{\delta}{\delta t}(z_{uv}) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta z_u}{\delta t}\right) - z_{u\mathfrak{x}} \frac{\partial \xi}{\partial v} - z_{u\mathfrak{y}} \frac{\partial \eta}{\partial u}$$

$$[z = x \text{ oder } y, \quad v = \mathfrak{x} \text{ oder } \mathfrak{y}, \quad u = \mathfrak{x}^{(\mu)} \mathfrak{y}^{(\nu)}]$$

bis zur s-ten Ordnung, so stellen Gleichungen von der Form

$$[\mathfrak{X}^{(s)}(I_k)]_{d_k = \alpha_k} = \mathfrak{X}^{(s)}(\alpha_k) \qquad (k = 1 \ldots l),$$

wo $\alpha_1 \ldots \alpha_l$ Functionen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ sind, die gesuchten Definitionsgleichungen aller Gruppen, die mit der vorgelegten Gruppe ähnlich sind, dar.

Da die Ableitung irgend einer Invariante der Gruppe nach $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$ wieder eine Invariante ist, so brauchen wir nicht alle Invarianten, sondern nur eine gewisse kleine Zahl davon wirklich durch

Integration zu finden; alle übrigen lassen sich durch blosse Differentiation dieser bestimmen. Diese nur durch Integration bestimmten Invarianten nennen wir die wesentlichen Invarianten.

Die erhaltenen Differentialgleichungen bilden ein unbeschränkt integrables System dann und nur dann, wenn sich durch Differentiation nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und Elimination der höheren Ableitungen keine neue Differentialgleichung derselben oder geringerer Ordnung bilden lässt. Ist das System nicht unbeschränkt integrabel, so müssen wir durch die angedeuteten Operationen dasselbe vervollständigen. Differentiiren wir dann noch einmal nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, so müssen diese neuen Gleichungen eine Folge des Systems selbst sein. Eliminiren wir daraus alle möglichen Ableitungen der ξ, η, so müssen die Coefficienten aller noch vorhandenen Ableitungen der ξ, η verschwinden. Die so gefundenen Relationen

$$\varphi(\alpha_1 \dots \alpha_l, \frac{\partial \alpha}{\partial \mathfrak{x}} \cdots) = 0$$

bilden die Integrabilitätsbedingungen, welche zusammen mit den Definitionsgleichungen die verlangte Aufgabe vollständig erledigen.

Die ganze Methode besteht also aus den folgenden Teilprocessen, und die Resultate der Ausführung derselben auf die verschiedenen Typen sind in den nachfolgenden Paragraphen zusammengestellt.

A. Die Bestimmung der Ordnungszahl s der nötigen Erweiterung von den Transformationen des vorgelegten Typus, sowie der Gesamtzahl T der unabhängigen Invarianten, § V.

B. Die Bestimmung der Zahl der wesentlichen Invarianten jeder Ordnung, § VI.

C. Die Berechnung dieser Invarianten durch Auflösung des entsprechenden Systems partieller Differentialgleichungen, § VII.

D. Die Ausrechnung der Zuwüchse dieser Invarianten bei der beliebigen Transformation $\mathfrak{X}f$, und das Ausdrücken derselben durch die Invarianten allein, § VII.

E. Die Bestimmung der gesuchten Definitionsgleichungen durch die Formel

$$[\mathfrak{X}^{(s)}(I_k)]_{d_k = \alpha_k} = \mathfrak{X}^{(s)}(\alpha_k) \qquad (k = 1 \dots l),$$

§ VII.

F. Die Untersuchung über die Integrabilität dieser Systeme von Differentialgleichungen, und die Berechnung der Integrabilitätsbedingungen, § VII.

In § IV findet man die von Lie aufgestellte Tabelle der sämtlichen Typen von Punktransformationen in der Ebene.

Da das Verfahren für alle Typen genau dasselbe ist, habe ich es für nötig erachtet, die ganze Ausrechnung nur für zwei vorbildliche Fälle ausführlich zu geben. Für die übrigen Fälle genügt es, die Resultate mit passenden Anmerkungen zu geben.

Ich habe die unter F. erwähnte Untersuchung nicht für alle Typen vollständig ausgeführt.

§ II.

Vorbemerkungen.

Es war nicht leicht, ein einfaches Bezeichnungssystem zu wählen. Ich hoffe nur, dass meine Abkürzungen die Klarheit nicht stören mögen. Die meisten Symbole habe ich an den betreffenden Stellen definirt, einige allgemeinere Symbole aber stelle ich in diesem Paragraphen zusammen. Zu gleicher Zeit gebe ich hier gewisse wichtige Beziehungen und Formeln.

In der ganzen Ausrechnung kommen die Potenzen sehr selten in Betracht. In der That sind r und c die einzigen Buchstaben, die als Exponenten vorkommen. In den Paragraphen III, VII sollen demnach die oberen, bez. unteren Striche in Verbindung mit lateinischen oder griechischen Buchstaben überall partielle Ableitungen nach $\mathfrak{x}$ bez. $\mathfrak{y}$ andeuten. In Verbindung mit deutschen Buchstaben, die immer Hilfsgrössen darstellen, und die gleich danach definirt werden, sollen die oberen und unteren Striche nur als Unterscheidungszeichen dienen.

Ferner bedeuten $x_\nu^{\mu-\nu}$, ξ_τ^σ, p_n^{m-n}, bez. q_k^i, $\frac{\partial^\mu x}{\partial \mathfrak{x}^{\mu-\nu} \partial \mathfrak{y}^\nu}$, $\frac{\partial^{\sigma+\tau} \xi}{\partial \mathfrak{x}^\sigma \partial \mathfrak{y}^\tau}$, $\frac{\partial f}{\partial x_n^{m-n}}$, $\frac{\partial f}{\partial y_k^i}$, $\binom{m}{i} \equiv \frac{m!}{i!\,(m-i)!}$.

Da die Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in § V gar nicht vorkommen, so können wir in jenem Paragraphen schreiben

$$\xi^{(r+1)} \text{ für } \frac{\partial^{r+1} \xi}{\partial x^{r+1}}$$

Bezeichnen wir mit m die betrachtete Ordnungszahl der Erweiterung von den Transformationen einer Gruppe, mit G_m die Zahl der unabhängigen Gleichungen nullter bis m-ter Ordnung des Systems, nachdem wir dasselbe durch lineare Combination seiner Gleichungen auf die möglichst einfache Form gebracht haben, mit V_m die Anzahl

der Variabeln nullter bis m-ter Ordnung, mit T_m die Gesamtzahl der unabhängigen Invarianten nullter bis m-ter Ordnung, mit I_m die Zahl der unabhängigen Invarianten m-ter Ordnung, aus denen sich keine Invariante von niedrigerer Ordnung zusammensetzen lässt, mit D_m die Zahl der Invarianten m-ter Ordnung, die sich durch Differentiation bestimmen lassen und endlich mit W_m die Zahl der wesentlichen Invarianten m-ter Ordnung, so bestehen die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} V_m &= (m+1)(m+2) \\ T_m &= V_m - G_m \\ I_m &= T_m - T_{m-1} \\ W_m &= I_m - D_m. \end{aligned}$$

Bedeuten ferner s die Ordnungszahl der nötigen Erweiterung, ϱ die Gliederzahl der Gruppe, so ergeben sich auch

$$\begin{aligned} G_s &= \varrho \\ T_s &= (s+1)(s+2) - \varrho. \end{aligned}$$

Erweitern wir die oft vorkommende Transformation $x^r q$ s-mal vermittelst der Formel

$$\frac{\delta}{\delta t}(z_{uv}) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta z_u}{\delta t}\right)$$

$$\left[z = x \text{ oder } y,\ v = \mathfrak{x} \text{ oder } \mathfrak{y},\ z_u = \frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial \mathfrak{x}^\mu \partial \mathfrak{y}^\nu}\right],$$

so bekommen wir

$$Wf = x^r q + \sum_1^s {}_m \sum_0^m {}_n \frac{\partial^m (x^r)}{\partial \mathfrak{x}^{m-n} \partial \mathfrak{y}^n} q_n^{m-n}.$$

Wenn wir diese Glieder nach den Potenzen von x ordnen und gruppiren, so erhalten wir

$$Wf = x^r q + \sum_1^r {}_t \binom{r}{t} (t)!\, x^{r-t} U_t,$$

wo U_t bedeutet

$$U_t \equiv \frac{1}{t!} \sum_t^s {}_m \sum_0^m {}_n \sum_{t-1}^{m-1} {}_{m_1} \sum_0^{m_1} {}_{n_1} \sum_{t-2}^{m_1-1} {}_{m_2} \sum_0^{m_2} {}_{n_2} \cdots \sum_1^{m_{t-2}-1} {}_{m_{t-1}} \sum_0^{m_{t-2}} {}_{n_{t-1}} \binom{m-n}{m_1-n_1} \binom{m_1-n_1}{m_2-n_2} \cdots$$

$$\cdots \binom{m_{t-2}-n_{t-2}}{m_{t-1}-n_{t-1}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \cdots \binom{n_{t-2}}{n_{t-1}} x_{n-n_1}^{(m-n)-(m_1-n_1)} x_{n_1-n_2}^{(m_1-n_1)-(m_2-n_2)} \cdots$$

$$\cdots x_{n_{t-2}-n_{t-1}}^{(m_{t-2}-n_{t-2})-(m_{t-1}-n_{t-1})} x_{n_{t-1}}^{m_{t-1}-n_{t-1}} q_n^{m-n}.$$

Wenn wir die Transformation

$$\mathfrak{X}f = \xi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + 0 \frac{\partial f}{\partial x} + 0 \frac{\partial f}{\partial y}$$

vermittels der gewöhnlichen Formel

$$\frac{\delta z_{uv}}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta z_u}{\delta t}\right) - z_{u\mathfrak{x}} \frac{\partial \xi}{\partial v} - z_{u\mathfrak{y}} \frac{\partial \eta}{\partial v}$$

$$\left[z = x \text{ oder } y,\ v = \mathfrak{x} \text{ oder } \mathfrak{y},\ z_u = \frac{\partial^{\mu+\nu} z}{\partial \mathfrak{x}^{\mu} \partial \mathfrak{y}^{\nu}}\right]$$

erweitern, so erhalten wir

$$\mathfrak{X}^{(s)}f = \xi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + \eta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + 0 \frac{\partial f}{\partial x} + 0 \frac{\partial f}{\partial y} -$$

$$- \sum_1^s {}_m \sum_0^m {}_n \Bigg\{ \Bigg[\sum_0^{m-n} {}_i \sum_0^n {}_k \binom{m-n}{i} \binom{n}{k} \left(x_k^{i+1} \xi_{n-k}^{m-n-i} + x_{k+1}^{i} \eta_{n-k}^{m-n-i}\right) -$$

$$- \left(x_n^{m-n+1} \xi + x_{n+1}^{m-n} \eta\right)\Bigg] p_n^{m-n} +$$

$$+ \Bigg[\sum_0^{m-n} {}_i \sum_0^n {}_k \binom{m-n}{i} \binom{n}{k} \left(y_k^{i+1} \xi_{n-k}^{m-n-i} + y_{k+1}^{i} \eta_{n-k}^{m-n-i}\right) -$$

$$- \left(y_n^{m-n+1} \xi + y_{n+1}^{m-n} \eta\right)\Bigg] q_n^{m-n} \Bigg\}.$$

Um dasselbe zu beweisen nehmen wir an, dass es für $m = m$, $n = n$ gilt, sodass, zum Beispiel

$$\frac{\delta x_n^{m-n}}{\delta t} = - \sum_0^{m-n} {}_i \sum_0^n {}_k \binom{m-n}{i} \binom{n}{k} \left[x_k^{i+1} \xi_{n-k}^{m-n-i} + x_{k+1}^{i} \eta_{n-k}^{m-n-i}\right] +$$

$$+ \left(x_n^{m-n+1} \xi + x_{n+1}^{m-n} \eta\right).$$

Wenden wir jetzt die oben gegebene Erweiterungsformel noch einmal an, so bekommen wir

$$\frac{\delta x_n^{m-n+1}}{\delta t} = - \sum_0^{m-n} {}_i \sum_0^n {}_k \binom{m-n}{i} \binom{n}{k} \left[x_k^{i+1} \xi_{n-k}^{m-n-i+1} + x_{k+1}^{i} \eta_{n-k}^{m-n-i+1} +\right.$$

$$\left. + x_k^{i+2} \xi_{n-k}^{m-n-i} + x_{k+1}^{i+1} \eta_{n-k}^{m-n-i}\right] +$$

$$+ \left(x_n^{m-n+1} \xi' + x_{n+1}^{m-n} \eta' + x_n^{m-n+2} \xi + x_{n+2}^{m-n+1} \eta\right) -$$

$$- \left(x_n^{m-n+1} \xi' + x_{n+1}^{m-n} \eta'\right)$$

$$= - \sum_0^{m-n+1} {}_i \sum_0^n {}_k \binom{m-n+1}{i} \binom{n}{k} \left[x_k^{i+1} \xi_{n-k}^{m-n-i+1} + x_{k+1}^{i} \eta_{n-k}^{m-n-i+1}\right] +$$

$$+ \left(x_n^{m-n+2} \xi + x_{n+1}^{m-n+1} \eta\right).$$

Dies stimmt genau mit dem Resultat überein, das wir bekommen, wenn wir in der betrachteten Formel m durch $m+1$ ersetzen.

Da es leicht zu ersehen ist, dass die Formel für $m = 1, 2, 3$ gilt, so muss sie für alle Werte von m gelten.

Hier habe ich nur einen der vier Fälle betrachtet. Die drei übrigen lassen sich in genau derselben Weise erledigen.

Ist φ irgend eine Function der x, y und ihrer Ableitungen, so haben wir die wichtige Formel

$$\mathfrak{X}\varphi_\nu^{\mu-\nu} = (\mathfrak{X}\varphi)_\nu^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\left[\varphi_k^{i+1}\xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \varphi_{k+1}^{i}\eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i}\right] + \\ + \left(\varphi_\nu^{\mu-\nu+1}\xi + \varphi_{\nu+1}^{\mu-\nu}\eta\right).$$

Um dieselbe zu beweisen, nehmen wir an, dass sie für $\mu = \mu$, $\nu = \nu$ gilt. Führen wir jetzt die Erweiterungsformel

$$\frac{\delta z_{uv}}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\delta z_u}{\delta t}\right) - z_{u\mathfrak{x}}\frac{\partial \xi}{\partial v} - z_{u\mathfrak{y}}\frac{\partial \eta}{\partial v}$$

$$[z = x \text{ oder } y,\ v = \mathfrak{x} \text{ oder } \mathfrak{y},\ u = \mathfrak{x}^{(m)}\mathfrak{y}^{(n)}]$$

für den Fall $z_u = \varphi_\nu^{\mu-\nu}$, $v = \mathfrak{y}$ aus, so bekommen wir

$$\mathfrak{X}\varphi_{\nu+1}^{\mu-\nu} = (\mathfrak{X}\varphi)_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\left[\varphi_k^{i+1}\xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} + \varphi_{k+1}^{i}\eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i}\right] - \\ - \sum_0^{\mu-\nu}{}_{i,} \sum_0^{\nu}{}_{k,} \binom{\mu-\nu}{i,}\binom{\nu}{k,}\left[\varphi_{k,+1}^{i,+1}\xi_{\nu-k,}^{\mu-\nu-i,} + \varphi_{k,+2}^{i,}\eta_{\nu-k,}^{\mu-\nu-i,}\right] + \\ + \left(\varphi_\nu^{\mu-\nu+1}\xi_, + \varphi_{\nu+1}^{\mu-\nu}\eta_, + \varphi_{\nu+1}^{\mu-\nu+1}\xi + \varphi_{\nu+2}^{\mu-\nu}\eta\right) - \left(\varphi_\nu^{\mu-\nu+1}\xi_, + \varphi_{\nu+1}^{\mu-\nu}\eta_,\right).$$

Setzen wir $i_, = i$, $k_, = k-1$, so stimmen die unteren und oberen Striche in dem dritten Glied der rechten Seite mit den in dem zweiten Glied. Setzen wir ferner fest, dass

$$\binom{\nu}{k}_{k=\nu+1} \equiv 0, \quad \binom{\nu}{k-1}_{k=0} \equiv 0$$

sein soll, so können wir die Grenzen umformen und die beiden Glieder zusammen schreiben

$$-\sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu+1}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\left\{\binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k-1}\right\}\left[\varphi_k^{i+1}\xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} + \varphi_{k+1}^{i}\eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i}\right].$$

Wir finden aber

$$\binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k-1} = \binom{\nu+1}{k}.$$

Die Formel reducirt sich also auf die Form

$$\mathfrak{X}\varphi_{\nu+1}^{\mu-\nu} = (\mathfrak{X}\varphi)_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu}{}^i \sum_0^{\nu+1}{}^k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu+1}{k}\left[\varphi_k^{i+1}\xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} + \varphi_{k+1}^{i}\eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i}\right] +$$
$$+ \left(\varphi_{\nu+1}^{\mu-\nu-i}\xi + \varphi_{\nu+2}^{\mu-\nu}\eta\right).$$

Wir erhalten genau dieselbe, wenn wir in der ursprünglichen Formel μ bez. ν durch $\mu + 1$, bez. $\nu + 1$ ersetzen.

Da die Formel sich leicht für $\mu, \nu = 1, 2, 3$ verificiren lässt, so muss sie für alle Werte von μ, ν gelten.

§ III.

Ausführliche Behandlung der Typen 1.) und 8.).

Als erstes Beispiel, um die Methode der Auflösung ausführlich zu zeigen, nehmen wir den ersten Typus, der die allgemeine projective Gruppe der Ebene darstellt. Die Gruppe ist achtgliedrig und besteht aus den unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$p,\; q,\; xq,\; xp - yq,\; yp,\; xp + yq,\; x^2p + xyq,\; xyp + y^2q.$$

A. Die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe ist

$$Xf = (e_1 + e_3x + e_4y + e_7x^2 + e_8xy)\,p + (e_2 + e_5x + e_6y + e_7xy + e_8y^2)\,q.$$

Wir haben also die zwei Grössen nullter Ordnung

$$\bar{\xi} = e_1 + e_3x + e_4y + e_7x^2 + e_8xy$$
$$\bar{\eta} + e_2 + e_5x + e_6y + e_7xy + e_8y^2,$$

und keine von ihnen ist bestimmt. Einmalige Differentiation nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ liefert die vier Grössen

$$\bar{\xi}' = e_3 + 2e_7x + e_8y$$
$$\bar{\xi}_{,} = e_4 + e_8x$$
$$\bar{\eta}' = e_5 + e_7y$$
$$\bar{\eta}_{,} = e_6 + e_7x + 2e_8y,$$

und wieder ist keine durch die übrigen bestimmt. Differentiiren wir noch einmal, so bekommen wir die sechs Grössen

$$\bar{\xi}'' = 2e_7, \quad \bar{\xi}_{,}' = e_8, \quad \bar{\xi}_{,,} = 0,$$
$$\bar{\eta}'' = 0, \quad \bar{\eta}_{,}' = e_7, \quad \bar{\eta}_{,,} = 2e_8,$$

und vermittelst Elimination der unbestimmten Constanten e_7, e_8 lassen sich vier von den Grössen durch die anderen zwei bestimmen. Die dritte Differentiation liefert die acht Grössen $\xi''' \ldots \eta_{,,,}$, die sämtlich den Wert Null besitzen, sowie alle höheren Ableitungen. Die Ordnungszahl s der nötigen Erweiterung hat also den Wert 3.

Wir sehen aber, dass es möglich ist, aus den erhaltenen Gleichungen zweiter Ordnung alle unbestimmten Constanten fortzuschaffen. Also können wir ruhig für s statt drei den geringeren Wert zwei nehmen. Der nächste Schritt zeigt ferner, dass die sämtlichen wesentlichen Invarianten von der zweiten Ordnung sind, welche dieselbe Verminderung der Zahl s liefert. Genau dieselbe Verkleinerung tritt in den Fällen der Typen 4, 16, 20, 25, 28 ein. Es ist merkwürdig, dass wir gerade für diese sechs Typen die Integrabilitätsbedingungen nur nach zweimaliger Differentiation der Definitionsgleichungen erhalten.

B. Erweitern wir die acht Transformationen zweimal, und setzen wir die erweiterten Transformationen gleich Null, so bekommen wir die folgenden acht partiellen Differentialgleichungen:

$$p = 0$$
$$q = 0$$
$$yp + y'p' + y_{,}p_{,} + y''p'' + y_{,}'p_{,}' + y_{,,}p_{,,} = 0$$
$$xp - yq + x'p' + x_{,}p_{,} - y'q' - y_{,}q_{,} + x''p'' + x_{,}'p_{,}' + x_{,,}p_{,,} - \\ - y''q'' - y_{,}'q_{,}' - y_{,,}q_{,,} = 0$$
$$xq + x'q' + x_{,}q_{,} + x''q'' + x_{,}'q_{,}' + x_{,,}q_{,,} = 0$$
$$xp + yq + x'p' + x_{,}p_{,} + y'q' + y_{,}q_{,} + x''p'' + x_{,}'p_{,}' + x_{,,}p_{,,} + \\ + y''q'' + y_{,}'q_{,}' + y_{,,}q_{,,} = 0$$
$$x^2p + xyq + 2xx'p' + 2xx_{,}p_{,} + (xy' + yx')q' + (xy_{,} + yx_{,})q_{,} + \\ + 2(xx'' + x'^2)p'' + 2(xx_{,}' + x'x_{,})p_{,}' + 2(xx_{,,} + x_{,}^2)p_{,,} + \\ + (xy'' + yx'' + 2x'y')q'' + (xy_{,}' + yx_{,}' + x'y_{,} + y'x_{,})q_{,}' + \\ + (xy_{,,} + yx_{,,} + 2x_{,}y_{,})q_{,,} = 0$$
$$xyp + y^2q + (xy' + yx')p' + (xy_{,} + yx_{,})p_{,} + 2yy'q' + 2yy_{,}q_{,} + \\ + (xy'' + yx'' + 2x'y')p'' + (xy_{,}' + yx_{,}' + x'y_{,} + y'x_{,})p_{,}' + \\ + (xy_{,,} + yx_{,,} + 2x_{,}y_{,})p_{,,} + 2(yy'' + y'^2)q'' + \\ + 2(yy_{,}' + y'y_{,})q_{,}' + 2(yy_{,,} + y_{,}^2)q_{,,} = 0.$$

Durch Combination reduciren sich diese leicht auf die folgenden:

$$p = 0$$
$$q = 0$$
$$y'p' + y_{,}p_{,} + y''p'' + y_{,}'p_{,}' + y_{,,}p_{,,} = 0$$
$$x'p' + x_{,}p_{,} + x''p'' + x_{,}'p_{,}' + x_{,,}p_{,,} = 0$$

$$x'q' + x_{,}q_{,} + x''q'' + x'_{,}q'_{,} + x_{,,}q_{,,} = 0$$
$$y'q' + y_{,}q_{,} + y''q'' + y'_{,}q'_{,} + y_{,,}q_{,,} = 0$$
$$2x'^2p'' + 2x'x_{,}p'_{,} + 2x_{,}^2p_{,,} + 2x'y'q'' + (x'y_{,} + y'x_{,})q'_{,} + 2x_{,}y_{,}q_{,,} = 0$$
$$2x'y'p'' + (x'y_{,} + y'x_{,})p'_{,} + 2x_{,}y_{,}p_{,,} + 2y'^2q'' + 2y'y_{,}q'_{,} + 2y_{,}^2q_{,,} = 0.$$

Dann haben wir zwei Gleichungen zwischen den zwei Grössen nullter Ordnung, also keine Lösung; sechs Gleichungen zwischen den sechs Grössen nullter und erster Ordnung, also wieder keine Lösung; acht Gleichungen zwischen den zwölf Grössen nullter, erster und zweiter Ordnung, also vier Lösungen. Für die nullte bis dritte Ordnung incl. haben wir acht Gleichungen und zwanzig Grössen, also zwölf Lösungen, vier von zweiter und acht von dritter Ordnung. Die letzteren lassen sich sämtlich durch Differentiation der ersteren nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ finden. Dasselbe geschieht für alle höheren Ordnungen.

C. Die Integration des reducirten Systems führen wir in gewöhnlicher Weise aus und bekommen die vier gemeinsamen Lösungen

$$B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_{,} - y'x_{,}}, \qquad \Phi = \frac{2(x'y'_{,} - y'x'_{,}) + (x_{,}y'' - y_{,}x'')}{x'y_{,} - y'x_{,}},$$
$$\Psi = \frac{(x'y_{,,} - y'x_{,,}) + 2(x_{,}y'_{,} - y_{,}x'_{,})}{x'y_{,} - y'x_{,}}, \qquad \Theta = \frac{x_{,}y_{,,} - y_{,}x_{,,}}{x'y_{,} - y'x_{,}},$$

die das Invariantensystem der vorgelegten Gruppe bilden.

D. Wenn wir auf diese die zweimal erweiterte, ganz beliebige Transformation

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}f = \xi\mathfrak{p} + \eta\mathfrak{q} &- (x'\xi' + x_{,}\eta')p' - (x'\xi_{,} + x_{,}\eta_{,})p_{,} - (y'\xi' + y_{,}\eta')q' - \\ &- (y'\xi_{,} + y_{,}\eta_{,})q_{,} - (x'\xi'' + x_{,}\eta'' + 2x''\xi' + 2x'_{,}\eta')p'' - \\ &- (x'\xi'_{,} + x_{,}\eta'_{,} + x'_{,}\xi' + x''\xi_{,} + x_{,,}\eta' + x'_{,}\eta_{,})p'_{,} - (x'\xi_{,,} + \\ &+ x_{,}\eta_{,,} + 2x'_{,}\xi_{,} + 2x_{,,}\eta_{,})p_{,,} - (y'\xi'' + y_{,}\eta'' + 2y''\xi' + \\ &+ 2y'_{,}\eta')q'' - (y'\xi'_{,} + y_{,}\eta'_{,} + y'_{,}\xi' + y''\xi_{,} + y_{,,}\eta' + y'_{,}\eta_{,})q'_{,} - \\ &- (y'\xi_{,,} + y_{,}\eta_{,,} + 2y'_{,}\xi_{,} + 2y_{,,}\eta_{,})q_{,,}\end{aligned}$$

ausführen, so ergeben sich die entsprechenden Zuwüchse

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}B &= -\eta'' - 2B\xi' - \Phi\eta' + B\eta_{,}\\ \mathfrak{X}\Phi &= \xi'' - 2\eta'_{,} - \Phi\xi' - 3B\xi_{,} - 2\Psi\eta'\\ \mathfrak{X}\Psi &= 2\xi'_{,} - \eta_{,,} - 2\Phi\xi_{,} - 3\Theta\eta' - \Psi\eta_{,}\\ \mathfrak{X}\Theta &= \xi_{,,} + \Theta\xi' - \Psi\xi_{,} - 2\Theta\eta_{,}\,.\end{aligned}$$

E. Vermittelst der angedeuteten Formel erhalten wir dann die verlangten Definitionsgleichungen

$$\eta'' + 2\beta\xi' + \varphi\eta' - \beta\eta_, + \beta'\xi + \beta_,\eta = 0$$
$$2\eta'_, - \xi'' + \varphi\xi' + 3\beta\xi_, + 2\psi\eta' + \varphi'\xi + \varphi_,\eta = 0$$
$$\eta_{,,} - 2\xi'_, + 2\varphi\xi_, + 3\theta\eta' + \psi\eta_, + \psi'\xi + \psi_,\eta = 0$$
$$\xi_{,,} + \theta\xi' - \psi\xi_, - 2\theta\eta_, - \theta'\xi - \theta_,\eta = 0 .$$

F. Da es nur vier Gleichungen für die sechs Ableitungen zweiter Ordnung $\xi'' \ldots \eta_{,,}$ giebt, so sehen wir, dass das System nicht ohne Weiteres unbeschränkt integrabel ist. Durch einmalige Differentiation wird es vervollständigt. Differentiiren wir diese Gleichungen noch einmal, und eliminiren wir aus allen vorhandenen Gleichungen die Grössen $\xi^{\text{IV}} \ldots \eta_{\text{IV}}$, $\xi''' \ldots \eta_{,,,}$ und $\xi'' \ldots \eta_{,,}$ bis auf zwei, so müssen die Coefficienten der beiden übrigen Ableitungen zweiter Ordnung, aller Ableitungen erster Ordnung und die von ξ und η verschwinden. Die Elimination lässt sich in doppelter Weise vollziehen, nämlich, wenn wir die Definitionsgleichungen mit den Nummern (1), (2), (3), (4) bezeichnen,

$$3(1)_{,,} - 2(2)'_, + 1(3)'' - 3\theta(1)' + 3\psi(1)_, - 2\varphi(2)_, + \varphi(3)' +$$
$$+ 3\beta(3)_, + 6\beta(4)' + (3\psi_, - 6\theta')(1) + (\psi' - 2\varphi_,)(2) + 3\beta_,(3) +$$
$$+ 3\alpha'(4) \equiv \mathfrak{U}(2\xi' + \eta_,) + \mathfrak{B}\eta' + \mathfrak{U}'\xi + \mathfrak{U}_,\eta = 0 ,$$
$$(2)_{,,} - 2(3)'_, - 3(4)'' + 6\theta(1)_, - 3\theta(2)' - \psi(2)_, + 2\psi(3)' + 3\varphi(4)' -$$
$$- 3\beta(4)_, + 3\theta_,(1) - 3\theta'(2) + (2\psi' - \varphi_,)(3) -$$
$$- (6\beta_, - 3\varphi')(4) \equiv \mathfrak{U}\xi_, + \mathfrak{B}(\xi' + 2\eta_,) + \mathfrak{B}'\xi + \mathfrak{B}_,\eta = 0 ,$$

wo $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ die Werte besitzen

$$\mathfrak{U} = 3\beta_{,,} - 2\varphi'_, + \psi'' + 3\beta\psi_, + 3\psi\beta_, - 6\beta\theta' - 3\theta\beta' - 2\varphi\varphi_, + \varphi\psi'$$
$$\mathfrak{B} = \varphi_{,,} - 2\psi'_, + 3\theta'' + 3\beta\theta_, + 6\theta\beta_, - 3\varphi\theta' - 3\theta\varphi' - \psi\varphi_, + 2\psi\psi' .$$

$\mathfrak{U} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ sind also die Integrabilitätsbedingungen.

In seiner Habilitationsschrift S. 53—57 hat Engel die Definitionsgleichungen dieser Gruppe berechnet, wobei er beachtet, dass sie den zweiten Typus, die allgemeine lineare Gruppe als Untergruppe enthält. Nachdem er die Definitionsgleichungen der letzteren gefunden hat, bekommt er ein System von Differentialgleichungen (Gl. 12, S. 57) für die darin vorhandenen Grössen β_x, β_y, ε_x, ε_y. Differentiiren wir diese Gleichungen nach x, y, so erhalten wir zwei Integrabilitätsbedingungen, welche mit unseren eben gefundenen übereinstimmen.

Wir betrachten als zweites Beispiel Typus 8, der $(r+4)$-gliedrig ist, und aus den unabhängigen Transformationen

$$q, \; xq, \; \ldots \; x^r q, \; yq, \; p, \; xp$$

entsteht.

A. Die allgemeine Transformation der Gruppe ist

$$Xf = (e_1 + e_2 x)p + (e_3 y + c_0 + c_1 x + \cdots + c_r x^r)q\,.$$

Wir haben also die zwei Grössen nullter Ordnung

$$\bar{\xi} = e_1 + e_2 x$$
$$\bar{\eta} = e_1 y + c_0 + c_1 x + \cdots + c_r x^r\,,$$

von denen keine bestimmt ist. Einmalige Differentiation nach x, y giebt

$$\bar{\xi}' = e_2\,, \quad \bar{\xi}_{,} = 0\,, \quad \bar{\eta}_{,} = e_3\,,$$
$$\bar{\eta}' = c_1 + 2c_2 x + \cdots + r c_r x^{r-1}\,,$$

wovon eine bestimmt ist. Ferner bekommen wir

$$\bar{\xi}'' = \bar{\xi}_{,}' = \bar{\xi}_{,,} = \bar{\eta}_{,,} = \bar{\eta}_{,}' = 0\,,$$
$$\bar{\eta}'' = 2c_2 + 6c_3 x + \cdots + r(r-1)c_r x^{r-2}\,,$$

wo also fünf bestimmt sind. Für $1 < k < r+1$ finden wir immer $2(k+1)-1$ Grössen k-ter Ordnung bestimmt. Da endlich $\bar{\eta}^{(r+1)} = 0$ ist, so verschwinden alle $2(r+2)$ Grössen $(r+1)$-ter Ordnung. Die Ordnungszahl ist also $s = r+1$.

B. Die $r+4$ Transformationen der Gruppe $(r+1)$-mal erweitert und gleich Null gesetzt bilden das System partieller Differentialgleichungen

$$q = 0$$
$$xq + U_1 = 0$$
$$x^2 q + 2x U_1 + 2U_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^r q + r x^{r-1} U_1 + r(r-1)x^{r-2} U_2 + \cdots + r!\cdot U_r = 0$$
$$yq + y'q' + y_{,}q_{,} + \cdots + y_{r+1} q_{r+1} = 0$$
$$p = 0$$
$$xp + x'p' + x_{,}p_{,} + \ldots + x_{r+1} p_{r+1} = 0\,,$$

wo U_t bedeutet

$$U_t \equiv \frac{1}{t!}\sum_{t}^{r+1}{}_m \sum_{0}^{m}{}_n \sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1} \sum_{0}^{m_1}{}_{n_1} \sum_{t-2}^{m_1-1}{}_{m_2} \sum_{0}^{m_2}{}_{n_2} \cdots \sum_{1}^{m_{t-2}-1}{}_{m_{t-1}} \sum_{0}^{m_{t-1}}{}_{n_{t-1}} \binom{m-n}{m_1-n_1}\binom{m_1-n_1}{m_2-n_2} \cdots$$
$$\cdots \binom{m_{t-2}-n_{t-2}}{m_{t-1}-n_{t-1}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \cdots \binom{n_{t-2}}{n_{t-1}} x_{n-n_1}^{(m-n)-(m_1-n_1)} x_{n_1-n_2}^{(m_1-n_1)-(m_2-n_2)} \cdots$$
$$\cdots x_{n_{t-2}-n_{t-1}}^{(m_{t-2}-n_{t-2})-(m_{t-1}-n_{t-1})} x_{n_{t-1}}^{m_{t-1}-n_{t-1}} q_n^{m-n}\,.$$

Dasselbe reducirt sich durch Combination auf das folgende:

$$q = 0$$
$$U_1 = 0$$
$$U_2 = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$U_r = 0$$
$$y'q' + y_{,}q_{,} + \cdots + y_{r+1}q_{r+1} = 0$$
$$p = 0$$
$$x'p' + x_{,}p_{,} + \cdots + x_{r+1}p_{r+1} = 0.$$

Hier haben wir zwei Gleichungen für die zwei Grössen nullter Ordnung, also keine Invariante nullter Ordnung; fünf Gleichungen für die sechs Grössen nullter und erster Ordnung, also eine wesentliche Invariante erster Ordnung; sechs Gleichungen für die 12 Grössen nullter bis zweiter Ordnung, also sechs Invarianten. Von den fünf Invarianten zweiter Ordnung sind zwei durch Differentiation aus der vorhergefundenen bestimmt, während es drei wesentliche Invarianten zweiter Ordnung giebt.

Ferner bekommen wir für $2 < k < r + 1$, $k + 4$ Gleichungen für die $(k + 1)(k + 2)$ Grössen nullter bis k-ter Ordnung, also $k^2 + 2k - 2$ Invarianten nullter bis k-ter Ordnung incl. Die $2k + 1$ Invarianten k-ter Ordnung lassen sich sämtlich durch Differentiation aus den vier schon gefundenen wesentlichen Invarianten bestimmen. Es giebt also keine neue Invariante dritter bis r-ter Ordnung incl. Wir finden aber $2r + 4$ Invarianten $(r + 1)$-ter Ordnung, von denen sich nur $2r + 3$ durch Differentiation bestimmen lassen; also giebt es eine wesentliche Invariante $(r + 1)$-ter Ordnung. Da keine weitere wesentliche Invariante auftritt, so besitzt die Gruppe nur diese fünf wesentlichen Invarianten, eine von erster, drei von zweiter und eine von $(r + 1)$-ter Ordnung.

C. Wir haben in A. und B. schon gesehen, dass dieser Typus eine Invariante erster Ordnung, drei wesentliche Invarianten zweiter Ordnung und eine wesentliche Invariante $(r + 1)$-ter Ordnung besitzt. Um die Invarianten erster und zweiter Ordnung zu bestimmen, brauchen wir nur das reducirte System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
p &= 0\\
q &= 0\\
x'p' + x_{,}p_{,} + \cdots + x_{,,}p_{,,} &= 0\\
y'q' + y_{,}q_{,} + \cdots + y_{,,}q_{,,} &= 0\\
x'q' + x_{,}q_{,} + \cdots + x_{,,}q_{,,} &= 0\\
x'^2q'' + x'x_{,}q_{,}' + x_{,}^2q_{,,} &= 0
\end{aligned}$$

zu betrachten, da alle weiteren Glieder dieser Gleichungen, sowie alle weiteren Gleichungen dieses Typus von dritter und höherer Ordnung sind. Die beiden ersten Gleichungen zeigen uns, dass x, y selber in den Invarianten nicht vorkommen. Aus den dritten und vierten bekommen wir die Lösungen

$$a = \frac{x_{,}}{x'}, \quad b = \frac{x''}{x'}, \quad c = \frac{x_{,}'}{x'}, \quad d = \frac{x_{,,}}{x'},$$

$$a_1 = \frac{y_{,}}{y'}, \quad b_1 = \frac{y''}{y'}, \quad c_1 = \frac{y_{,}'}{y'}, \quad d_1 = \frac{y_{,,}}{y'}.$$

Setzen wir nun diese Grössen als neue Variabeln in die fünfte Gleichung ein, so erhalten wir die Gleichung

$$0\,\frac{\partial f}{\partial a} + \cdots + 0\,\frac{\partial f}{\partial d} + (a - a_1)\,\frac{\partial f}{\partial a_1} + \cdots + (d - d_1)\,\frac{\partial f}{\partial d_1} = 0.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \qquad B_1 = \frac{b - b_1}{a - a_1} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_{,} - y'x_{,}},$$

$$B_2 = \frac{c - c_1}{a - a_1} = \frac{x'y_{,}' - y'x_{,}'}{x'y_{,} - y'x_{,}}, \quad B_3 = \frac{d - d_1}{a - a_1} = \frac{x'y_{,,} - y'x_{,,}}{x'y_{,} - y'x_{,}}.$$

Führen wir diese als neue Variabeln in die sechste Gleichung ein, so bekommen wir die Gleichung

$$0\,\frac{\partial f}{\partial a} + \cdots + 0\,\frac{\partial f}{\partial d} + \frac{\partial f}{\partial B_1} + a\,\frac{\partial f}{\partial B_2} + a^2\,\frac{\partial f}{\partial B_3} = 0,$$

und die Lösungen

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad C_1 = B_2 - aB_1, \quad C_3 = B_3 - aB_2.$$

Da jede Function der Invarianten allein auch eine Invariante ist, können wir, der Bequemlichkeit wegen, die verlangten wesentlichen Invarianten schreiben

$$\varDelta = a = \frac{x_,}{x'}, \qquad \Gamma = b = \frac{x''}{x'},$$
$$\varDelta' = B_2 - aB_1 + b = (\log(x'y_, - y'x_,))'$$
$$\varDelta_, = B_3 - aB_2 + c = (\log(x'y_, - y'x_,))_,.$$

Die zwei übrigen Invarianten sind

$$\varDelta' = c - ab, \qquad \varDelta_, = d - ac.$$

In ähnlicher Weise kommen wir auf die wesentliche Invariante $(r+1)$-ter Ordnung

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' \dots \mathfrak{A}_2^{r+1} \\ \mathfrak{A}_3'' & \mathfrak{A}_3''' \dots \mathfrak{A}_3^{r+1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{A}_r'' & \mathfrak{A}_r''' \dots \mathfrak{A}_r^{r+1} \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' \dots \mathfrak{B}^{r+1} \end{vmatrix}$$

wenn wir nach und nach die Lösungen jeder partiellen Differentialgleichung des ganzen reducirten Systems als neue Variabeln in die nächste Gleichung einsetzen. Hier bedeuten $\mathfrak{A}_t^m$ und $\mathfrak{B}^m$

$$\mathfrak{A}_t^m \equiv \frac{1}{t} \sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1} \binom{m}{m_1} \mathfrak{A}_{t-1}^{m_1} \cdot \frac{x^{m-m_1}}{x'}$$
$$\equiv \frac{1}{t!} \sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1} \sum_{t-2}^{m_1-1}{}_{m_2} \dots \sum_{1}^{m_{t-2}-1}{}_{m_{t-1}} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \dots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \dots$$
$$\dots \frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{x'} \frac{x^{m_{t-1}}}{x'}$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x'y^m - y'x^m}{x'y_, - y'x_,}.$$

Es ist wohl $\mathfrak{A}_t^m \equiv 0$ für $t > m$, und $\mathfrak{A}_t^m \equiv 1$ für $t = m$.

Es genügt aber nachzuweisen, dass die obenerwähnte Grösse $\varDelta$ wirklich eine solche Invariante ist. Offenbar ist $\varDelta$ $(r+1)$-ter Ordnung. Ferner lässt sie sich nicht aus $\varDelta$, Γ, $\varDelta'$ und $\varDelta_,$ und ihren Ableitungen allein bestimmen, da einerseits $\varDelta$ die Ableitungen erster Ordnung $x_,$, $y_,$ und ausserdem nur die Ableitungen von x, y nach $\mathfrak{x}$ allein enthält, während andrerseits $\varDelta$, Γ y und ihre Ableitungen gar nicht enthalten, $\varDelta'$, $\varDelta_,$ die zweite Ableitung von y wenigstens einmal nach $\mathfrak{y}$ $(y_,', y_{,,})$ enthalten.

Wir bezeichnen mit

$$Pf \equiv p = 0$$

$$Qf \equiv q = 0$$

$$U_t f \equiv \frac{1}{t!} \sum_t^{r+1} {}_m \sum_0^{m} {}_n \sum_{t-1}^{m-1} {}_{m_1} \sum_0^{n} {}_{n_1} \sum_{t-2}^{m_1-1} {}_{m_2} \sum_0^{n_1} {}_{n_2} \cdots \sum_1^{m_{t-2}-1} {}_{m_{t-1}} \sum_0^{n_{t-2}} {}_{n_{t-1}} \binom{m-n}{m_1-n_1} \binom{m_1-n_1}{m_2-n_2} \cdots$$

$$\cdots \binom{m_{t-2}-n_{t-2}}{m_{t-1}-n_{t-1}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \cdots \binom{n_{t-2}}{n_{t-1}} x_{n-n_1}^{(m-n)-(m_1-n_1)} x_{n_1-n_2}^{(m_1-n_1)-(m_2-n_2)} \cdots$$

$$\cdots x_{n_{t-1}}^{m_{t-1}-n_{t-1}} q_n^{m-n} = 0$$

$$[t = 1,\ 2,\ \ldots r]$$

$$Xf \equiv x'p' + x_,p_, + \cdots + x_{r+1}p_{r+1} = 0$$

$$Yf \equiv y'q' + y_,q_, + \cdots + y_{r+1}q_{r+1} = 0$$

die Gleichungen des reducirten Systems. Dann bekommen wir

$$P(\Delta) = Q(\Delta) \equiv 0;$$

$$X\left(\frac{x^m}{x'}\right) = Y\left(\frac{x^m}{x'}\right) = X(\mathfrak{A}_t^m) = Y(\mathfrak{A}_t^m) = 0,$$

$$X(\mathfrak{B}^m) = Y(\mathfrak{B}^m) \equiv 0,$$

und also

$$X(\Delta) = Y(\Delta) \equiv 0;$$

$$U_h(\mathfrak{A}_t^m) \equiv 0, \quad U_1(\mathfrak{B}^m) \equiv 0, \quad U_h(\mathfrak{B}^m) = \frac{\mathfrak{A}_h^m \cdot x'}{x'y_, - y'x_,}, \qquad [h = 2, 3, \ldots r],$$

also $U_1(\Delta) \equiv 0$ und

$$U_h(\Delta) = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' \ldots & \mathfrak{A}_2^{r+1} \\ 0 & \mathfrak{A}_3''' \ldots & \mathfrak{A}_3^{r+1} \\ . & . \ \ldots & \mathfrak{A}_r^{r+1} \\ \mathfrak{A}_h'' & \mathfrak{A}_h''' \ldots & \mathfrak{A}_h^{r+1} \end{vmatrix} \cdot \frac{x'}{x'y_, - y'x_,} \equiv 0.$$

$$[h = 2, 3, \ldots r.]$$

Δ erfüllt also die sämtlichen Gleichungen des Systems und ist die verlangte Invariante $(r+1)$-ter Ordnung.

Betrachten wir die Ableitungen nach $\mathfrak{x}$ allein, so können wir in $U_t f = 0$ $n = n_, = \cdots n_{t-1} = 0$ setzen, und dadurch bekommen

$$\overline{U}_t f \equiv \sum_t^{r+1} {}_m (x')^t \, \mathfrak{A}_t^m q^m = 0,$$

oder

$$\overline{V}_t f \equiv \sum_t^{r+1} {}_m \mathfrak{A}_t^m q^m = 0 \qquad [t = 1,\ 2,\ \ldots r].$$

Hierdurch ist $\mathfrak{A}_t^m$ definirt.

Wir brauchen nicht alle Ableitungen der Invariante Γ, sondern bloss ihre Ableitungen nach $\mathfrak{x}$ zu benutzen, um die Gesammtzahl der unabhängigen Invarianten zu vervollständigen.

Da jede Function der Invarianten allein auch eine Invariante ist, so haben wir eine grosse Auswahl von Formen derselben. Wir wählen daher unsere Invarianten in solcher Gestalt, um zwei besondere Schwierigkeiten des Auflösungsprocesses möglichst zu erleichtern. Diese sind, erstens das Ausdrücken des Zuwachses jeder Invariante durch die Invarianten allein, und zweitens die Ausrechnung der Integrabilitätsbedingungen in bequemster Weise.

D. Führen wir auf die Invarianten A, Γ, A', $\Lambda_,$, Δ und deren Ableitungen bis zur $(r+1)$-ten Ordnung die $(r+1)$-mal erweiterte beliebige Transformation $\mathfrak{X}^{(s)}f$ aus, so ergeben sich die folgenden Zuwüchse:

$$\mathfrak{X} A_\nu^{\mu-\nu} = -\,\xi_{\nu+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} A_k^i\, \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} -$$

$$-\sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu+1}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu+1}{k} A_k^i\, \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} +$$

$$+\sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \sum_0^{i}{}_\sigma \sum_0^{k}{}_\tau \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau} A_\tau^\sigma A_{k-\tau}^{i-\sigma}\, \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} +$$

$$+\left[A_\nu^{\mu-r+1}\xi + A_{\nu+1}^{\mu-\nu}\eta\right]$$

$$\mathfrak{X}\Gamma^\mu = -\,\xi^{\mu+2} - \sum_0^{\mu+2}{}_i \binom{\mu+2}{i} A^i \eta^{\mu-i+2} - \sum_0^{\mu+1}{}_i \binom{\mu+1}{i} \Big\{ \Gamma^i \xi^{\mu-i+1} +$$

$$+\sum_0^{i}{}_\sigma \binom{i}{\sigma} A^\sigma \Gamma^{i-\sigma} \eta^{\mu-i+1} \Big\} + \left[\Gamma^{\mu+1}\xi + \Gamma_,^\mu \eta\right]$$

$$\mathfrak{X}\Lambda_\nu^{\mu-\nu} = -\,\xi_\nu^{\mu-r+1} - \eta_{r+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k} \Big\{ \Lambda_k^{i+1}\xi_{r-k}^{\mu-\nu-i} +$$

$$+\Lambda_{k+1}^i \eta_{r-k}^{\mu-\nu-i} \Big\} + \left[\Lambda_\nu^{\mu-r+1}\xi + \Lambda_{\nu+1}^{\mu-\nu}\eta\right]$$

$$\mathfrak{X}\Delta = -\sum_0^{r}{}_k \eta^{r-k+1} \begin{vmatrix} \mathfrak{G}_{r-k+2}^{r-k+2} & \mathfrak{G}_{r-k+2}^{r-k+3} & \dots & \mathfrak{G}_{r-k+2}^{r+2} \\ 0 & \mathfrak{G}_{r-k+3}^{r-k+3} & \dots & \mathfrak{G}_{r-k+3}^{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{G}_{r+1}^{r+2} \\ 1 & \binom{r-k+2}{r-k+1}\mathfrak{H}'' & \dots & \binom{r+2}{r-k+1}\mathfrak{H}^k \end{vmatrix} - \Delta\left[(r+1)\xi' + (r+2)A\eta' - \eta_,\right],$$

wo $\mathfrak{G}_t^m$ und $\mathfrak{H}^m$ die Werte besitzen:

$$\mathfrak{G}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{m_1=t-1}^{m-1} \sum_{m_2=t-2}^{m_1-1} \cdots \sum_{m_{t-1}=1}^{m_{t-2}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \cdots$$

$$\cdots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \Bigg[\Gamma^{m-m_1-2} + \sum_{h=2}^{m-m_1-1} \frac{1}{h!} \sum_{l_1=h-1}^{m-m_1-2} \sum_{l_2=h-2}^{l_1-1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{l_{h-1}=1}^{l_{h-2}-1} \binom{m-m_1-1}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \cdots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \Gamma^{m-m_1-l_1-2} \Gamma^{l_1-l_2-1} \cdots$$

$$\cdots \Gamma^{l_{h-2}-l_{h-1}-1} \Gamma^{l_{h-1}-1} \Bigg] \cdots$$

$$\cdots \Bigg[\Gamma^{m_{t-2}-m_{t-1}-2} + \sum_{h=2}^{m_{t-2}-m_{t-1}-1} \frac{1}{h!} \sum \cdots \Bigg] \Bigg[\Gamma^{m_{t-1}-2} + \sum_{h=2}^{m_{t-1}-1} \frac{1}{h!} \sum \cdots \Bigg]$$

$$\mathfrak{H}^m \equiv \Delta^m + \sum_{h=2}^{m} \frac{1}{h!} \sum_{m_1=h-1}^{m-1} \sum_{m_2=h-2}^{m_1-1} \cdots \sum_{m_{h-1}=1}^{m_{h-2}-1} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \cdots$$

$$\cdots \binom{m_{h-2}}{m_{h-1}} \Delta^{m-m_1} \Delta^{m_1-m_2} \cdots \Delta^{m_{h-2}-m_{h-1}} \Delta^{m_{h-1}}.$$

Ich habe diesen Werth von $\mathfrak{X}\Delta$ durch Induction bekommen und seine Richtigkeit für $s = 2, 3, 4, 5, 6$ bestätigt. Zu einem allgemeinen Beweis dafür fehlen aber noch einige Punkte, die ich hoffe später zu erledigen.

E. Die Anwendung der passenden Formel liefert die verlangten Definitionsgleichungen

$$\xi_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_{i=0}^{\mu-\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} \alpha_k^i \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\mu-\nu} \sum_{k=0}^{\nu+1} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \alpha_k^i \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\mu-\nu} \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{\sigma=0}^{i} \sum_{\tau=0}^{k} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \alpha_\tau^\sigma \alpha_{k-\tau}^{i-\sigma} \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0$$

$$\xi^{\mu+2} + \sum_{i=0}^{\mu+2} \binom{\mu+2}{i} \alpha^i \eta^{\mu-i+1} + \sum_{i=0}^{\mu+1} \binom{\mu+1}{i} \Big\{ \gamma^i \xi^{\mu-i+1} +$$

$$+ \sum_{\sigma=0}^{i} \binom{i}{\sigma} \alpha^\sigma \gamma^{i-\sigma} \eta^{\mu-i+1} \Big\} = 0$$

$$\xi_\nu^{\mu-\nu+1}+\eta_{\nu+1}^{\mu-\nu}+\sum_{i=0}^{\mu-\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\left\{\lambda_k^{i+1}\,\xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i}+\lambda_{k+1}^{i}\,\eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i}\right\}=0$$

$$\sum_{k=0}^{r}\eta^{r-k+1}\begin{vmatrix}\mathfrak{g}_{r-k+2}^{r-k+2} & \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r-k+3} & \dots & \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r+2}\\ 0 & \mathfrak{g}_{r-k+3}^{r-k+3} & \dots & \mathfrak{g}_{r-k+3}^{r+2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{g}_{r+1}^{r+2}\\ 1 & \binom{r-k+2}{r-k+1}\mathfrak{h}'' & \dots & \binom{r+2}{r-k+1}\mathfrak{h}^{k}\end{vmatrix}+\delta[(r+1)\xi'+(r+2)\alpha\eta'-\eta_{,}]+\delta'\xi+\delta_{,}\eta=0.$$

Hier besitzen die Hilfsgrössen $\mathfrak{g}_t^m$ und $\mathfrak{h}^m$ die Werte

$$\mathfrak{g}_t^m\equiv\frac{1}{t!}\sum_{m_1=t-1}^{m-1}\sum_{m_2=t-2}^{m_1-1}\cdots\sum_{m_{t-2}=1}^{m_{t-2}-1}\binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2}\cdots$$

$$\cdots\binom{m_{h-2}}{m_{h-1}}\Bigg[\gamma^{m-m_1-2}+\sum_{h=2}^{m-m_1-1}\frac{1}{h!}\sum_{l_1=h-1}^{m-m_1-2}\sum_{l_2=h-1}^{l_1-1}\cdots$$

$$\cdots\sum_{l_{h-1}=1}^{l_{h-2}-1}\binom{m-m_1-1}{l_1}\binom{l_1}{l_2}\cdots\binom{l_{h-2}}{l_{h-1}}\gamma^{m-m_1-l_1-2}\gamma^{l_1-l_2-1}\cdots\gamma^{l_{h-2}-l_{h-1}}\gamma^{l_{h-1}}\Bigg]\cdots$$

$$\cdots\Bigg[\gamma^{m_{t-2}-m_{t-1}-2}+\sum_{h=2}^{m_{t-2}-m_{t-1}-2}\frac{1}{h!}\sum^{l_1}\cdots\Bigg]\Bigg[\gamma^{m_{t-1}-2}+\sum_{h=2}^{m_{t-1}-1}\frac{1}{h!}\sum\cdots\Bigg]$$

$$\mathfrak{h}^m\equiv\lambda^m+\sum_{h=2}^{m}\frac{1}{h!}\sum_{m_1=h-1}^{m-1}\sum_{m_2=h-2}^{m_1-1}\cdots\sum_{m_{h-1}=1}^{m_{h-2}-1}\binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2}\cdots$$

$$\cdots\binom{m_{h-2}}{m_{h-1}}\lambda^{m-m_1}\lambda^{m_1-m_2}\cdots\lambda^{m_{h-2}m_{h-1}}\lambda^{m_{h-1}}.$$

F. Die sämtlichen Ableitungen $(r+1)$-ter Ordnung $\xi^{r+1}\dots\eta_{r+1}$ sind dadurch bestimmt, und das System ist unbeschränkt integrabel. Wenn wir die Gleichungen noch einmal differentiiren und alle möglichen Ableitungen der ξ und η fortschaffen, bekommen wir die beiden Integrabilitätsbedingungen

$$\gamma_{,}=\alpha''+\alpha\gamma'+\gamma\alpha'$$

$$\delta_{,}-\alpha\delta'+\delta[\lambda_{,}-\alpha\lambda'-(r+2)\alpha']=\begin{vmatrix}1 & \mathfrak{g}_1'' & \mathfrak{g}_1''' & \dots & \mathfrak{g}_1^{r+1}\\ 0 & 1 & \mathfrak{g}_2''' & \dots & \mathfrak{g}_2^{r+2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathfrak{g}_{r+1}^{r+2}\\ 1 & \mathfrak{h}' & \mathfrak{h}'' & \dots & \mathfrak{h}^{r+1}\end{vmatrix}.$$

Hier besitzen die Grössen $\mathfrak{g}_t^m$, bez. $\mathfrak{h}^m$ die oben erwähnten Werte. Die erste Bedingung ist schon benutzt worden, um die zweite Definitionsgleichung zu vereinfachen.

Es ist zu bemerken, dass in den Definitionsgleichungen die unteren und oberen Striche in den Symbolen α', $\alpha_,$ (sowohl auch λ', $\lambda_,$, u. s. w.) blosse Unterscheidungszeichen sind, und dass α, α', $\alpha_,$ zunächst nur drei verschiedene Functionen darstellen. Als Integrabilitätsbedingungen aber bekommen wir gleich jetzt $\alpha' = (\alpha)'$, $\alpha_, = (\alpha)_,$. Deswegen können wir die Klammern weglassen und die Ableitung α' statt $(\alpha)'$ schreiben.

Dieselbe Bemerkung gilt für alle Typen. Deshalb habe ich der Einfachheit wegen die sämtlichen Definitionsgleichungen ohne die Klammern geschrieben.

§ IV.

Sämtliche Typen der endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen in der Ebene.

Theorem 6. (Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, dritter Abschnitt, S. 71.) »Jede endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene x, y ist durch eine Punkttransformation mit einer und im Allgemeinen nur mit einer der nachstehend aufgeführten Gruppen ähnlich:

A. Primitive Gruppen.

1) $p, q, xq, xp - yq, yp, xp - yq, x^2p + xyq, xyp + y^2q.$

2) $p, q, xq, xp - yq, yp, xp + yq.$

3) $p, q, xq, xp - yq, yp.$

B. Imprimitive Gruppen.

I. Gruppen mit einer einzigen invarianten Schaar von ∞^1 Curven.

a) Die invariante Schaar zählt bloss einfach.

4) $q, xq, p, 2xp + yq, x^2p + xyq.$

5) $q, xq, \ldots x^rq, p, 2xp + ryq, x^2p + rxyq.$
$[r > 2.]$

6) $q, xq, \ldots x^rq, yq, p, xp, x^2p + rxyq.$
$[r > 0.]$

7) $yq, p, xp, x^2p + xyq.$

8) $q, xq, \ldots x^r q, yq, p, xp.$
$[r > 0.]$

9) $q, xq, \ldots x^r q, p, xp + cyq.$
$[r > 0, c \neq 1.]$

10) $q, xq, \ldots x^{r-1} q, p, xp + (ry + x^r)q.$
$[r > 1.]$

11) $q, xq, \ldots x^m q, e^{\alpha_k x} q, x e^{\alpha_k x} q, \ldots x^{m_k} e^{\alpha_k x} q, yq, p.$
$[k = 1, 2, \ldots l;\ l \gtreqless 0;\ l + m + \sum_1^l{}_k m_k > 0;\ \alpha_1 = 1.]$

12) $q, xq, F_1(x)q, \ldots F_r(x)q, yq.$
$[r \gtreqless 0.]$

b) Die invariante Schaar zählt doppelt.

13) $q, xq, x^2q, p, xp + yq, x^2p + 2xyq.$

14) $p, 2xp + yq, x^2p + xyq.$

15) $q, xq, \ldots x^r q, p, xp + yq.$
$[r > 0.]$

16) $q, p, xp + (x + y)q.$

17) $e^{\alpha_k x} q, x e^{\alpha_k x} q, \ldots x^{m_k} e^{\alpha_k x} q, p.$
$[\alpha_1(\alpha_1 - 1) = 0;\ k = 1, 2, \ldots l;\ l > 0;\ l + \sum_1^l{}_k m_k > 1.]$

18) $q, xq, F_1(x)q, \ldots F_r(x)q.$
$[r \gtreqless 0.]$

II. Gruppen mit zwei invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven.

19) $q, yq, y^2q, p, xp, x^2p.$

20) $p + q, xp + yq, x^2p + y^2q.$

21) $q, yq, y^2q, p, xp.$

22) $q, yq, y^2q, p.$

23) $q, yq, y^2q.$

24) $q, yq, p, xp.$

25) $q, p, xp + cyq.$
$[c \neq 0, 1.]$

26) $q, yq, p.$

27) $q, yq.$

III. Gruppen mit ∞^1 Schaaren von je ∞^1 Curven.

28) $p\,,\ q\,,\ xp + yq.$

29) $q\,,\ xp + yq.$

30) $p\,,\ q.$

IV. Gruppen mit ∞^∞ Schaaren von je ∞^1 Curven.

31) $q.$

§ V.

Bestimmung der Ordnungszahl der nötigen Erweiterung, sowie der Gesamtzahl der unabhängigen Invarianten.

Typus 1.)*)

$$\xi = e_1 + e_3 x + e_4 y + e_7 x^2 + e_8 xy$$
$$\eta = e_2 + e_5 x + e_6 y + e_7 xy + e_8 y^2$$
$$\xi' = e_3 + 2e_7 x + e_8 y$$
$$\xi_{,} = e_4 + e_8 x$$
$$\eta' = e_5 + e_7 y$$
$$\eta_{,} = e_6 + e_7 x + 2e_8 y$$
$$\xi'' = 2e_7\,,\quad \xi'_{,} = e_8\,,\quad \xi_{,,} = 0$$
$$\eta'' = 0\,,\quad \eta'_{,} = e_7\,,\quad \eta_{,,} = 2e_8$$
$$\varrho = 8\,,\quad s = 2\,,\quad T = 4.$$

[Siehe Auflösung, § III, S. 17.]

Ordnung.	Gesamte Grössen, n.	Bestimmte Grössen, m.	Übrige Grössen, n—m.
0	2	0	2
1	4	0	4
2	6	4	2
3	8	8	0

2.)

$$\xi = e_1 + e_3 x + e_4 y$$
$$\eta = e_2 + e_5 x + e_6 y$$
$$\xi' = e_3\,,\quad \xi_{,} = e_4$$
$$\eta' = e_5\,,\quad \eta_{,} = e_6$$
$$\xi'' = \xi'_{,} = \xi_{,,} = \eta'' = \eta'_{,} = \eta_{,,} = 0$$
$$\varrho = 6\,,\quad s = 2\,,\quad T = 6.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen, n.	Bestimmte Grössen, m.	Übrige Grössen, n—m.
0	2	0	2
1	4	0	4
2	6	6	0

*) Der Einfachheit wegen schreibe ich ξ, η statt $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$.

3.)

$$\xi = e_1 + e_4 x + e_5 y$$
$$\eta = e_2 + e_3 x - e_4 y$$
$$\xi' = e_4\,,\ \xi_{,} = e_5$$
$$\eta' = e_3\,,\ \eta_{,} = -e_4$$
$$\xi'' = \xi'_{,} = \xi_{,,} = \eta'' = \eta'_{,} = \eta_{,,} = 0$$
$$\varrho = 5\,,\ s = 2\,,\ T = 7\,.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	1	3
2	6	6	0

4.)

$$\xi = e_3 + 2e_4 x + e_5 x^2$$
$$\eta = e_1 + e_2 x + e_4 y + e_5 xy$$
$$\xi' = 2e_4 + 2e_5 x\,,\ \xi_{,} = 0$$
$$\eta' = e_2 + e_5 y\,,\ \eta_{,} = e_4 + e_5 y$$
$$\xi'' = 2e_5\,,\ \xi'_{,} = \xi_{,,} = \eta'' = \eta'_{,} = 0\,,\ \eta_{,,} = e_5\,.$$
$$\varrho = 5\,,\ s = 2\,,\ T = 7\,.$$

[Siehe § III, S. 17.]

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	5	1
3	8	8	0

5.)

$$\xi = e_1 + 2e_2 x + e_3 x^2$$
$$\eta = re_2 y + re_3 xy + c_0 + c_1 x + \cdots + c_r x^r$$
$$\xi' = 2e_2 + 2e_3 x\,,\ \xi_{,} = 0$$
$$\eta' = re_3 y + c_1 + 2c_2 x + \cdots + rc_r x^{r-1}$$
$$\eta_{,} = re_2 + re_3 x$$
$$\xi'' = 2e_3\,,\ \xi'_{,} = \xi_{,,} = \eta_{,,} = 0\,,\ \eta'_{,} = re_3$$
$$\eta'' = 2c_2 + 6c_3 x + \cdots + r(r-1)c_r x^{r-2}$$
$$\xi''' = \cdots \xi_{,,,} = \eta''_{,} = \eta'_{,,} = \eta_{,,,} = 0$$
$$\eta''' = 6c_3 + 24c_4 x + \cdots + r(r-1)(r-2)c_r x^{r-3}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\eta^{r+1} = 0$$
$$\varrho = r+4\,,\ s = r+1\,,\ T = r^2+4r+2\,.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	1	3
2	6	4	2
3	8	7	1
4	10	9	1
.	.	.	.
r	$2(r+1)$	$2r+1$	1
$r+1$	$2(r+2)$	$2r+4$	0

6.)

$\xi = e_1 + e_2 x + e_3 x^2$

$\eta = r e_3 x y + e_4 y + c_0 + c_1 x + \cdots + c_r x^r$

$\xi' = e_2 + 2 e_3 x\,,\ \ \xi_, = 0$

$\eta' = r e_3 y + c_1 + 2 c_2 x + \cdots + r c_r x^{r-1}$

$\eta_, = r e_3 x + e_4$

$\xi'' = 2 e_3\,,\ \ \xi'_, = \xi_{,,} = \eta_{,,} = 0\,,\ \ \eta'_, = r e^3$

$\eta'' = 2 c_2 + 6 c_3 x + \cdots + r(r-1) c_r x^{r-2}$

$\xi''' = \cdots = \xi_{,,,} = \eta''_, = \eta'_{,,} = \eta_{,,,} = 0$

$\eta''' = 6 c_3 + 24 c_4 x + \cdots + r(r-1)(r-2) c_r x^{r-3}$

. . . . . .

$\eta^{r+1} = 0$

$\varrho = r+5\,,\ \ s = r+1\,,\ \ T = r^2 + 4r + 1.$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	1	3
2	6	4	2
3	8	7	1
4	10	9	1
.	.	.	.
r	$2(r+1)$	$2r+1$	1
$r+1$	$2(r+2)$	$2r+4$	0

7.)

$\xi = e_1 + e_2 x + e_4 x^2$

$\eta = e_3 y + e_4 x y$

$\xi' = e_2 + 2 e_4 x\,,\ \ \xi_, = 0$

$\eta' = e_4 y\,,\ \ \eta_, = e_3 + e_4 x$

$\xi'' = 2 e_4\,,\ \ \xi'_, = \xi_{,,} = \eta'' = \eta_{,,} = 0\,,\ \ \eta'_, = e_4.$

$\varrho = 4\,,\ \ s = 2\,,\ \ T = 8.$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	6	0

8.)

$\xi = e_1 + e_2 x$

$\eta = e_3 y + c_0 + c_1 x + \cdots + c_r x^r$

$\xi' = e_2\,,\ \ \xi_, = 0\,,\ \ \eta_, = e_3$

$\eta' = c_1 + 2 c_2 x + \cdots + r c_r x^{r-1}$

$\xi'' = \xi'_, = \xi_{,,} = \eta'_, = \eta_{,,} = 0$

$\eta'' = 2 c_2 + 6 c_3 x + \cdots + r(r-1) c_r x^{r-2}$

. . . . . .

$\eta^{r+1} = 0$

$\varrho = r+4\,,\ \ s = r+1\,,\ \ T = r^2 + 4r + 2.$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	1	3
2	6	5	1
3	8	7	1
.	.	.	.
r	$2(r+1)$	$2r+1$	1
$r+1$	$2(r+2)$	$2r+4$	0

9.)

$$\xi = e_1 + e_2 x$$
$$\eta = e_2 c y + a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r$$
$$\xi' = e_2\,,\ \xi_{,} = 0\,,\ \eta_{,} = e_2 c$$
$$\eta' = a_1 + 2 a_2 x + \cdots + r a_r x^{r-1}$$
$$\xi'' = \xi'_{,} = \xi_{,,} = \eta'_{,} = \eta_{,,} = 0$$
$$\eta'' = 2 a_2 + 6 a_3 x + \cdots + r(r-1) a_r x^{r-2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\eta^{r+1} = 0$$
$$\varrho = r+3\,,\ s = r+1\,,\ T = r^2+4r+3.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	5	1
3	8	7	1
.	.	.	.
r	$2(r+1)$	$2r+1$	1
$r+1$	$2(r+2)$	$2r+4$	0

10.)

$$\xi = e_1 + e_2 x$$
$$\eta = r e_2 y + e_2 x^r + c_0 + c_1 x + \cdots + c_{r-1} x^{r-1}$$
$$\xi' = e_2\,,\ \xi_{,} = 0\,,\ \eta_{,} = r e_2$$
$$\eta' = r e_2 x^{r-1} + c_1 + 2 c_2 x + \cdots + (r-1) c_{r-1} x^{r-2}$$
$$\xi'' = \xi'_{,} = \xi_{,,} = \eta'_{,} = \eta_{,,} = 0$$
$$\eta'' = r(r-1) e_2 x^{r-2} + 2 c_2 + 6 c_3 x + \cdots$$
$$\cdots + (r-1)(r-2) c_{r-1} x^{r-3}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\eta^r = r!\, e_2$$
$$\varrho = r+2\,,\ s = r\,,\ T = r^2+2r.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	5	1
3	8	7	1
.	.	.	.
$r-1$	$2r$	$2r-1$	1
r	$2(r+1)$	$2r+2$	0

11.)

$$\xi = e_1$$

$$\eta = e_2 y + \sum_{i=0}^{m} c_{0i} x^i + \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=0}^{m_k} c_{ki} x^i e^{\alpha_k x}$$

$$\xi' = \xi_, = 0 , \quad \eta_, = e_2$$

$$\eta' = \sum_{i=1}^{m} c_{0i} i x^{i-1} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=0}^{m_k} c_{ki} \left(\alpha_k x^i + i x^{i-1}\right) e^{\alpha_k x}$$

$$\xi'' = \xi_,' = \xi_{,,} = \eta_,' = \eta_{,,} = 0$$

$$\eta^{\sigma} = \sum_{i=\sigma}^{m} \frac{i!}{(i-\sigma)!} c_{0i} x^{i-\sigma} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=0}^{m_k} \sum_{h=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{h} \frac{i!}{(i-h)!} c_{ki} \alpha^{\sigma-h} x^{i-h} e^{\alpha_k x}$$

$$[\sigma = 1, 2, \ldots s.]$$

$$\varrho = 3 + l + m + \sum_{k=1}^{l} m_k , \quad s = 1 + l + m + \sum_{k=1}^{l} m_k ,$$

$$T = \left(2 + l + m + \sum_{k=1}^{l} m_k\right)^2 - 1 .$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	5	1
3	8	7	1
.	.	.	.
$\varrho-3$	$2(\varrho-2)$	$2\varrho-5$	1
$\varrho-2$	$2(\varrho-1)$	$2\varrho-2$	0

12.)

$$\xi = 0$$

$$\eta = e_1 + e_2 x + e_3 y + c_1 F_1(x) + \cdots + c_r F_r(x)$$

$$\eta_, = e_3 ; \quad \eta_,' = \eta_{,,} = 0$$

$$\eta' = e_2 + c_1 F_1'(x) + \cdots + c_r F_r'(x)$$

$$\eta^{r+2} = c_1 F_1^{(r+2)}(x) + \cdots + c_r F_r^{(r+2)}(x)$$

$$\varrho = r+3 , \quad s = r+2 , \quad T = r^2 + 6r + 9 .$$

0	2	1	1
1	4	2	2
2	6	5	1
3	8	7	1
.	.	.	.
$r+1$	$2(r+1)$	$2r+3$	1
$r+2$	$2(r+2)$	$2r+6$	0

13.)

$$\xi = e_1 + e_5 x + e_6 x^2$$

$$\eta = e_2 + e_3 x + e_4 x^2 + e_5 y + 2 e_6 x y$$

$$\xi' = e_5 + 2 e_6 x , \quad \xi_, = 0$$

$$\eta' = e_3 + 2 e_4 x + 2 e_6 y , \quad \eta_, = e_5 + 2 e_6 x$$

$$\xi'' = 2 e_6 , \quad \xi_,' = \xi_{,,} = 0$$

$$\eta'' = 2 e_4 , \quad \eta_,' = 2 e_6 , \quad \eta_{,,} = 0$$

$$\xi''' = \cdots = \eta_{,,,} = 0$$

$$\varrho = 6 , \quad s = 3 , \quad T = 14 .$$

0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	4	2
3	8	8	0

14.)

$$\xi = e_1 + 2e_2x + e_3x^2$$
$$\eta = e_2y + e_3xy$$
$$\xi' = 2e_2 + 2e_3x\,, \quad \xi_{\prime} = 0$$
$$\eta' = e_3y\,, \quad \eta_{\prime} = e_2 + e_3x$$
$$\xi'' = 2e_3\,, \quad \xi'_{\prime} = \xi_{\prime\prime} = 0$$
$$\eta'' = 0\,, \quad \eta'_{\prime} = e_3\,, \quad \eta_{\prime\prime} = 0$$
$$\varrho = 3\,, \quad s = 2\,, \quad T = 9\,.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0

15.)

$$\xi = e_1 + e_2x$$
$$\eta = e_2y + c_0 + c_1x + \cdots + c_rx^r$$
$$\xi' = e_2\,, \quad \xi_{\prime} = 0\,, \quad \eta_{\prime} = e_2$$
$$\eta' = c_1 + 2c_2x + \cdots + rc_rx^{r-1}$$
$$\xi'' = \xi'_{\prime} = \xi_{\prime\prime} = \eta'_{\prime} = \eta_{\prime\prime} = 0$$
$$\eta'' = 2c_2 + 6c_3x + \cdots + r(r-1)c_rx^{r-2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\eta^{r+1} = 0$$
$$\varrho = r+3\,, \quad s = r+1\,, \quad T = r^2+4r+3\,.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	5	1
3	8	7	1
.	.	.	.
r	$2(r+1)$	$2r+1$	1
$r+1$	$2(r+2)$	$2r+4$	0

16.)

$$\xi = e_1 + e_3x$$
$$\eta = e_2 + e_3x + e_3y$$
$$\xi' = e_3\,, \quad \xi_{\prime} = 0$$
$$\eta' = e_3\,, \quad \eta_{\prime} = e_3$$
$$\xi'' = \cdots = \eta_{\prime\prime} = 0$$
$$\varrho = 3\,, \quad s = 1\,, \quad T = 3\,.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0

[Siehe § III, S. 17.]

17.)

$$\xi = 0$$

$$\eta = \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=0}^{m_k} c_{ki}\, x^i\, e^{\alpha_k x}$$

$$\eta^\sigma = \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=0}^{m_k}\sum_{h=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{h} \frac{i!}{(i-h)!}\, c_{ki}\, \alpha^{\sigma-h}\, x^{i-h}\, e^{\alpha_k x}$$

$$[\sigma = 1,\ 2,\ \ldots s.]$$

$$\varrho = 1 + l + \sum_{k=1}^{l} m_k, \qquad s = l + \sum_{k=1}^{l} m_k,$$

$$T = \left(1 + l + \sum_{k=1}^{l} m_k\right)^2.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	1	1
1	4	3	1
2	6	5	1
.	.	.	.
$\varrho-2$	$2(\varrho-1)$	$2\varrho-3$	1
$\varrho-1$	2ϱ	2ϱ	0

18.)

$$\xi = 0$$

$$\eta = e_1 + e_2 x + c_1 F_2(x) + \cdots + c_r F_r(x)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\eta^{r+2} = c_1 F_1^{(r+2)}(x) + \cdots + c_r F_r^{(r+2)}(x)$$

$$\varrho = r+2,\ s = r+2,\ T = r^2 + 6r + 10.$$

0	2	1	1
1	4	3	1
2	6	5	1
.	.	.	.
$r+1$	$2(r+2)$	$2r+3$	1
$r+2$	$2(r+3)$	$2r+6$	0

19.)

$$\xi = e_1 + e_3 x + e_5 x^2$$

$$\eta = e_2 + e_4 y + e_6 y^2$$

$$\xi' = e_3 + 2e_5 x,\ \xi_, = \eta' = 0,\ \eta_, = e_4 + 2e_6 y$$

$$\xi'' = 2e_5,\ \xi_,' = \xi_{,,} = \eta'' = \eta_,' = 0,\ \eta_{,,} = 2e_6$$

$$\xi''' = \cdots = \eta_{,,,} = 0$$

$$\varrho = 6,\ s = 3,\ T = 14.$$

0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	4	2
3	8	8	0

20.)

$$\xi = e_1 + e_2 x + e_3 x^2$$

$$\eta = e_1 + e_2 y + e_3 y^2$$

$$\xi' = e_2 + 2e_3 x,\ \xi_, = \eta' = 0,\ \eta_, = e_2 + 2e_3 y$$

$$\xi'' = 2e_3,\ \xi_,' = \xi_{,,} = \eta'' = \eta_,' = 0,\ \eta_{,,} = 2e_3$$

$$\xi''' = \cdots = \eta_{,,,} = 0$$

$$\varrho = 3,\ s = 1,\ T = 3.$$

0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0
3	8	8	0

[Siehe § III, S. 17.]

21.)

$$\xi = e_1 + e_3 x$$
$$\eta = e_2 + e_4 y + e_5 y^2$$
$$\xi' = e_3\,,\quad \xi_{,} = \eta' = 0\,,\quad \eta_{,} = e_4 + 2e_5 y$$
$$\xi'' = \xi'_{,} = \xi_{,,} = \eta'' = \eta'_{,} = 0\,,\quad \eta_{,,} = 2e_5$$
$$\xi''' = \cdots = \eta_{,,,} = 0$$
$$\varrho = 5\,,\quad s = 3\,,\quad T = 15.$$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	5	1
3	8	8	0

22.)

$$\xi = e_1$$
$$\eta = e_2 + e_3 y + e_4 y^2$$
$$\xi' = \xi_{,} = \eta' = 0\,,\quad \eta_{,} = e_3 + 2e_4 y$$
$$\xi'' = \xi'_{,} = \xi_{,,} = \eta'' = \eta'_{,} = 0\,,\quad \eta_{,,} = 2e_4$$
$$\xi''' = \cdots = \eta_{,,,} = 0$$
$$\varrho = 4\,,\quad s = 3\,,\quad T = 16.$$

0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	5	1
3	8	8	0

23.)

$$\xi = 0$$
$$\eta = e_1 + e_2 y + e_3 y^2$$
$$\eta' = 0\,,\quad \eta_{,,} = e_2 + 2e_3 y$$
$$\eta'' = \eta'_{,} = 0\,,\quad \eta_{,,} = 2e_3$$
$$\xi''' = \cdots = \eta_{,,,} = 0$$
$$\varrho = 3\,,\quad s = 3\,,\quad T = 17.$$

0	2	1	1
1	4	3	1
2	6	5	1
3	8	8	0

24.)

$$\xi = e_1 + e_3 x$$
$$\eta = e_2 + e_4 y$$
$$\xi' = e_3\,,\quad \xi_{,} = \eta' = 0\,,\quad \eta_{,} = e_4$$
$$\xi' = \cdots = \eta_{,,} = 0$$
$$\varrho = 4\,,\quad s = 2\,,\quad T = 8.$$

0	2	0	2
1	4	2	2
2	6	6	0

25.)

$\xi = e_1 + e_3 x$
$\eta = e_2 + e_3 c y$
$\xi' = e_3\,, \quad \xi_{,} = \eta' = 0\,, \quad \eta_{,} = e_3 c$
$\xi'' = \cdots = \eta_{,,} = 0$
$\varrho = 3\,, \quad s = 1\,, \quad T = 3.$

[Siehe § III, S. 17.]

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0

26.)

$\xi = e_1$
$\eta = e_2 + e_3 y$
$\xi' = \xi_{,} = \eta' = 0\,, \quad \eta_{,} = e_3$
$\xi'' = \cdots = \eta_{,,} = 0$
$\varrho = 3\,, \quad s = 2\,, \quad T = 9.$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0

27.)

$\xi = 0$
$\eta = e_1 + e_2 y$
$\xi' = \xi_{,} = \eta' = 0\,, \quad \eta_{,} = e_2$
$\xi'' = \cdots = \eta_{,,} = 0$
$\varrho = 2\,, \quad s = 2\,, \quad T = 10.$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	1	1
1	4	3	1
2	6	6	0

28.)

$\xi = e_1 + e_3 x$
$\eta = e_2 + e_3 y$
$\xi' = e_3\,, \quad \xi_{,} = \eta' = 0\,, \quad \eta_{,} = e_3$
$\xi'' = \cdots = \eta_{,,} = 0$
$\varrho = 3\,, \quad s = 1\,, \quad T = 3.$

[Siehe § III, S. 17.]

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	3	1
2	6	6	0

29.)

$\xi = e_2 x$
$\eta = e_1 + e_2 y$
$\xi' = e_2\,, \quad \xi_{,} = \eta' = 0\,, \quad \eta_{,} = e_2$
$\xi'' = \cdots = \eta_{,,} = 0$
$\varrho = 2\,, \quad s = 1\,, \quad T = 4.$

Ordnung.	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
0	2	0	2
1	4	4	0

	Ordnung	Gesamte Grössen.	Bestimmte Grössen.	Übrige Grössen.
30.) $\xi = e_1$, $\eta = e_2$, $\xi' = \xi_, = \eta' = \eta_, = 0$; $\varrho = 2,\ s = 1,\ T = 4.$	0	2	0	2
	1	4	4	0
31.) $\xi = 0$, $\eta = e_1$, $\xi' = \xi_, = \eta' = \eta_, = 0$; $\varrho = 1,\ s = 1,\ T = 5.$	0	2	1	1
	1	4	4	0

§ VI.

Bestimmung der Zahl der wesentlichen Invarianten.

	Ordnung M	Gleichungen 0-ter bis m-ter Ord. G	Ges. Grössen 0-ter bis m-ter Ord. V	Ges. Invar. 0-ter bis m-ter Ord. T	Ges. Invar. m-ter Ord. I	Invar. m-ter Ord. durch Diff. D	Wesentl. Invar. m-ter Ord. W
Typus 1.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	6	6	0	0	0	0
	2	8	12	4	4	0	4
	3	8	20	12	8	8	0
2.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	6	6	0	0	0	0
	2	6	12	6	6	0	6
	3	6	20	14	8	8	0
3.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	5	6	1	1	0	1
	2	5	12	7	6	2	4
	3	5	20	15	8	8	0

	M	G	V	T	I	D	W
4.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	4	1
	3	5	20	15	8	8	0 .

5.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	6	12	6	4	4	0
	3	7	20	13	7	6	1
	4	8	30	22	9	9	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante ($r+1$)-ter Ordnung.

6.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	5	6	1	1	0	1
	2	7	12	5	4	2	2
	3	8	20	12	7	6	1
	4	9	30	21	9	9	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante ($r+1$)-ter Ordnung.

7.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	4	12	8	6	4	2
	3	4	20	16	8	8	0

8.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	5	6	1	1	0	1
	2	6	12	6	5	2	3
	3	7	20	13	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante ($r+1$)-ter Ordnung.

9.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	4	1
	3	6	20	14	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante ($r+1$)-ter Ordnung.

	M	G	V	T	I	D	W
10.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	4	1
	3	6	20	14	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante r-ter Ordnung.

11.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	3	2
	3	6	20	14	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante s-ter Ordnung.

12.)	0	1	2	1	1	0	1
	1	3	6	3	2	2	0
	2	4	12	8	5	3	2
	3	5	20	15	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante $(r+2)$-ter Ordnung.

13.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	6	12	6	4	4	0
	3	6	20	14	8	6	2
	4	6	30	24	10	10	0

14.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	5	1
	3	3	20	17	8	8	0

15.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	4	1
	3	6	20	14	7	7	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante $(r+1)$-ter Ordnung.

	M	G	V	T	I	D	W
16.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	6	0

17.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	4	12	8	5	5	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante s-ter Ordnung.

18.)	0	1	2	1	1	0	1
	1	2	6	4	3	2	1
	2	3	12	9	5	5	0

Hierzu noch eine wesentliche Invariante $(r + 2)$-ter Ordnung.

19.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	6	12	6	4	4	0
	3	6	20	14	8	6	2
	4	6	30	24	10	10	0

20.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	6	0

21.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	5	12	7	5	4	1
	3	5	20	15	8	7	1
	4	5	30	25	10	10	0

22.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	4	12	8	5	5	0
	3	4	20	16	8	7	1
	4	4	30	26	10	10	0

	M	*G*	*V*	*T*	*I*	*D*	*W*
23.)	0	1	2	1	1	0	1
	1	2	6	4	3	2	1
	2	3	12	9	5	5	0
	3	3	20	17	8	7	1
	4	3	30	27	10	10	0
24.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	4	6	2	2	0	2
	2	4	12	8	6	4	2
	3	4	20	16	8	8	0
25.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	6	0
26.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	5	1
	3	3	20	17	8	8	0
27.)	0	1	2	1	1	0	1
	1	2	6	4	3	2	1
	2	2	12	10	6	5	1
	3	2	20	18	8	8	0
28.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	3	6	3	3	0	3
	2	3	12	9	6	6	0
29.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	2	6	4	4	0	4
	2	2	12	10	6	6	0
30.)	0	2	2	0	0	0	0
	1	2	6	4	4	0	4
	2	2	12	10	6	6	0
31.)	0	1	2	1	1	0	1
	1	1	6	5	4	2	2
	2	1	12	11	6	6	0

§ VII.

Zusammenstellung der Invarianten, Definitionsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen der sämtlichen Typen.

Typus 1.) $p, \; q, \; xq, \; xp - yq, \; yp, \; xp + yq,$
$x^2p + xyq, \; xyp + y^2q.$

Invarianten.

$$B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_{,} - y'x_{,}}$$

$$\Phi = \frac{2(x'y'_{,} - y'x'_{,}) + (x_{,}y'' - y_{,}x'')}{x'y_{,} - y'x_{,}}$$

$$\Psi = \frac{(x'y_{,,} - y'x_{,,}) + 2(x_{,}y'_{,} - y_{,}x'_{,})}{x'y_{,} - y'x_{,}}$$

$$\Theta = \frac{x_{,}y_{,,} - y_{,}x_{,,}}{x'y_{,} - y'x_{,}}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\eta'' + 2\beta\xi' + \varphi\eta' - \beta\eta_{,} + \beta'\xi + \beta_{,}\eta = 0$$

$$2\eta'_{,} - \xi'' + \varphi\xi' + 3\beta\xi_{,} + 2\psi\eta' + \varphi'\xi + \varphi_{,}\eta = 0$$

$$\eta_{,,} - 2\xi'_{,} + 2\varphi\xi_{,} + 3\theta\eta' + \psi\eta_{,} + \psi'\xi + \psi_{,}\eta = 0$$

$$\xi_{,,} + \theta\xi' - \psi\xi_{,} - 2\theta\eta_{,} - \theta'\xi - \theta_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$3\beta_{,,} - 2\varphi'_{,} + \psi'' + 3\beta\psi_{,} + 3\psi\beta_{,} - 6\beta\theta' - 3\theta\beta' - 2\varphi\varphi_{,} + \varphi\psi' = 0$$

$$\varphi_{,,} - 2\psi'_{,} + 3\theta'' + 3\beta\theta_{,} + 6\theta\beta_{,} - 3\varphi\theta' - 3\theta\varphi' - \psi\varphi_{,} + 2\psi\psi' = 0.$$

2.) $p, \; q, \; xq, \; xp - yq, \; yp, \; xp + yq.$

Invarianten.

$$B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_{,} - y'x_{,}}, \quad E = \frac{x'y'_{,} - y'x'_{,}}{x'y_{,} - y'x_{,}}, \quad \Omega = \frac{x'y_{,,} - y'x_{,,}}{x'y_{,} - y'x_{,}},$$

$$\Phi = \frac{x_{,}y'' - y_{,}x''}{x'y_{,} - y'x_{,}}, \quad \Psi = \frac{x_{,}y'_{,} - y_{,}x'_{,}}{x'y_{,} - y'x_{,}}, \quad \Theta = \frac{x_{,}y_{,,} - y_{,}x_{,,}}{x'y_{,} - y'x_{,}}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\eta'' + 2\beta\xi' + (2\varepsilon + \varphi)\eta' - \beta\eta_, + \beta'\xi + \beta_,\eta = 0$$
$$\eta'_, + \varepsilon\xi' + \beta\xi_, + (\omega + \psi)\eta' + \varepsilon'\xi + \varepsilon_,\eta = 0$$
$$\eta_{,,} + 2\varepsilon\xi_, + \theta\eta' + \omega\eta_, + \omega'\xi + \omega_,\eta = 0$$
$$\xi'' - \varphi\xi' - \beta\xi_, - 2\psi\eta' - \varphi'\xi - \varphi_,\eta = 0$$
$$\xi'_, - (\varepsilon + \varphi)\xi_, - \theta\eta' - \psi\eta_, - \psi'\xi - \psi_,\eta = 0$$
$$\xi'' + \theta\xi' - (\omega + 2\psi)\xi_, - 2\theta\eta_, - \theta'\xi - \theta_,\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\varepsilon_, - \omega' = \varphi_, - \psi' = \varepsilon\psi - \beta\theta$$
$$\psi_, - \theta' = \psi(\psi + \omega) - \theta(\beta + \varepsilon)$$
$$\beta_, - \varepsilon' = \varepsilon(\varepsilon + \varphi) - \beta(\psi + \omega).$$

3.) $p\,,\ q\,,\ xq\,,\ xp - yq\,,\ yp.$

Invarianten.

$A = x'y_, - y'x_,\,,\quad B = x'y'' - y'x''\,,\quad E = x'y'_, - y'x'_,\,,\quad \Omega = x'y_{,,} - y'x_{,,}\,,$
$A'\,,\quad A_,\,,\quad \Theta = x_,y_{,,} - y_,x_{,,}.$

Definitionsgleichungen.

$$\alpha(\xi' + \eta_,) + \alpha'\xi + \alpha_,\eta + 0$$
$$\alpha\eta'' + 3\beta\xi' + (3\varepsilon - \alpha')\eta' + \beta'\xi + \beta_,\eta = 0$$
$$\alpha\eta'_, + 2\varepsilon\xi' + \beta\xi_, + (2\omega - \alpha_,)\eta' + \varepsilon\eta_, + \varepsilon'\xi + \varepsilon_,\eta = 0$$
$$\alpha\eta_{,,} + \omega\xi' + 2\varepsilon\xi_, + \theta\eta' + 2\omega\eta_, + \omega'\xi + \omega_,\eta = 0$$
$$\alpha(\xi'' + \eta'_,) + 2\alpha'\xi' + \alpha_,\eta' + \alpha'\eta_, + \alpha''\xi + \alpha'_,\eta = 0$$
$$\alpha(\xi'_, + \eta_{,,}) + \alpha_,\xi' + \alpha'\xi_, + 2\alpha_,\eta_, + \alpha'_,\xi + \alpha_{,,}\eta = 0$$
$$\alpha\eta_{,,} + (3\omega - 2\alpha_,) + 3\theta\eta_, + \theta'\xi + \theta_,\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\alpha\varepsilon_, - \alpha\omega' + \omega\alpha' = \varepsilon\omega - \beta\theta$$
$$\alpha\beta_, - 2\beta\alpha_, - \alpha\varepsilon' + 2\varepsilon\alpha' = 2\varepsilon^2 - 2\beta\omega$$
$$\alpha\alpha_{,,} - \alpha\omega_, + \alpha\theta' - 2\omega\alpha_, = 2\varepsilon\theta - 2\omega^2.$$

Die Bedingungen $\alpha' = (\alpha)'$, $\alpha_, = (\alpha)_,$ sind schon benutzt worden, um die fünfte und die sechste Gleichung zu vereinfachen. (Siehe die allgemeine Anmerkung.)

4.) $q\,,\; xq\,,\; p\,,\; 2xp + xq\,,\; x^2p + xyq.$

$$\varDelta = \frac{x_{,}}{x'},\quad \varLambda = \log \frac{x'y_{,} - y'x_{,}}{x'^{\frac{3}{2}}},\quad B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_{,} - y'x_{,}},\; \varDelta',\; \varDelta_{,},\; \varLambda',\; \varLambda_{,}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{,} + \alpha(\eta_{,} - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha_{,}\eta = 0$$
$$\eta_{,} - \tfrac{1}{2}\xi' - \tfrac{3}{2}\alpha\eta' + \lambda'\xi + \lambda_{,}\eta = 0$$
$$\eta'' + 2\beta\xi' + (2\lambda' + 3\alpha\beta)\eta' + \beta'\xi + \beta_{,}\eta = 0$$
$$\xi'_{,} + \alpha(\eta'_{,} - \xi'') - \alpha^2\eta'' + (\alpha_{,} - 2\alpha\alpha')\eta' + \alpha'\eta_{,} + \alpha''\xi + \alpha'_{,}\eta = 0$$
$$\xi_{,,} + \alpha(\eta_{,,} - \xi'_{,}) - \alpha^2\eta'_{,} - \alpha_{,}\xi' + \alpha'\xi_{,} - 2\alpha\alpha_{,}\eta' + 2\alpha_{,}\eta_{,} + \alpha'_{,}\xi + \alpha_{,,}\eta = 0$$
$$\tfrac{1}{2}\xi'' + \tfrac{3}{2}\alpha\eta'' - \eta'_{,} - \lambda'\xi' - (\lambda_{,} - \tfrac{3}{2}\alpha')\eta' - \lambda''\xi - \lambda'_{,}\eta = 0$$
$$\tfrac{1}{2}\xi'_{,} + \tfrac{3}{2}\alpha\eta'_{,} - \eta_{,,} - \lambda'\xi_{,} + \tfrac{3}{2}\alpha_{,}\eta' - \lambda_{,}\eta_{,} - \lambda'_{,}\xi - \lambda_{,,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\beta_{,,} - 2\alpha\beta'_{,} + \beta_{,}(\lambda_{,} - \alpha\lambda' - \tfrac{7}{2}\alpha') - \beta'(\alpha_{,} + \alpha\lambda_{,} - \alpha^2\lambda_{,} - \tfrac{9}{2}\alpha\alpha') +$$
$$+ \beta(\lambda_{,,} - 2\alpha\lambda'_{,} + \alpha^2\lambda'' - \alpha_{,}\lambda' + 3\alpha\alpha'\lambda' - 2\alpha'\lambda_{,} - \tfrac{3}{2}\alpha'_{,} + \tfrac{3}{2}\alpha\alpha'' + 3\alpha'^2) -$$
$$- \lambda''_{,} + \alpha\lambda''' - 2\lambda'\lambda'_{,} + 2\alpha\lambda'\lambda_{,,} + 2\alpha'\lambda'' + 2\alpha'\lambda'^2 - \tfrac{1}{2}\alpha''' = 0.$$

Die Bedingungen $\alpha' = (\alpha)'$, $\alpha_{,} = (\alpha)_{,}$, $\lambda' = (\lambda)'$, $\lambda_{,} = (\lambda)_{,}$ sind schon benutzt worden.

5.) $q\,,\; xq\,,\; \ldots x^r q\,,\; p\,,\; 2xp + ryq\,,\; x^2p + rxyq.$
$[r > 2.]$

Dieser Typus unterscheidet sich von dem Typus 6.) nur in dem Besitz der Invariante $\log\left(\frac{x'y_{,} - y'x_{,}}{x'^{\frac{r+2}{2}}}\right)$ und der daraus folgenden Gleichung. Alle übrigen Invarianten, Definitionsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen stimmen mit den zu jenem Falle gehörigen überein.

6.) $q,\; xq,\; \ldots x^r q,\; yq,\; p,\; xp,\; x^2p + rxyq.$
$[r > 0.]$

Invarianten.

$$\varDelta^{\mu-\nu}_{\nu} = \left(\frac{x_{,}}{x'}\right)^{\mu-\nu}_{\nu} \qquad [\mu = 0,\, 1,\, \ldots r;\; \nu = 0,\, 1,\, \ldots \mu.]$$

$$\varLambda^{\mu-\nu}_{\nu} = \left(\log \frac{x'y_{,} - y'x_{,}}{x'^{\frac{r+2}{2}}}\right)^{\mu-\nu}_{\nu} \qquad [\mu = 1,\, 2,\, \ldots r;\; \nu = 0,\, 1,\, \ldots \mu.]$$

$$\Omega^{\mu} = \left(\frac{2x'x''' - 3x''^2}{2x'^2}\right)^{\mu} \qquad [\mu = 0,\, 1,\, \ldots r - 1.]$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' & \dots & \mathfrak{A}_2^{r+1} \\ 0 & \mathfrak{A}_3''' & \dots & \mathfrak{A}_3^{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{A}_r^{r+1} \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \dots & \mathfrak{B}^{r+1} \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{A}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{t-1}^{m-1} {}_{m_1} \sum_{t-2}^{m_1-1} {}_{m_2} \cdots \sum_{1}^{m_{t-2}-1} {}_{m_{t-1}} \binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2} \cdots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \cdots$$

$$\cdots \frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{x'} \frac{x^{m_{t-1}}}{x'}$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x' y^m - y' x^m}{x' y_, - y' x_,} .$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1} {}_i \sum_0^{\nu} {}_k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} \alpha_k^i \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} +$$

$$+ \sum_0^{\mu-\nu} {}_i \sum_0^{\nu+1} {}_k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \alpha_k^i \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu} {}_i \sum_0^{\nu} {}_k \sum_0^{i} {}_\sigma \sum_0^{k} {}_\tau \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \alpha_\tau^\sigma \alpha_{k-\tau}^{i-\sigma} \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0.$$

$$\frac{r}{2} \xi_\nu^{\mu-\nu+1} - \eta_{\nu+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu} {}_i \sum_0^{\nu} {}_k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \left\{ \frac{r+2}{2} \alpha_k^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} - \lambda_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} - \right.$$

$$\left. - \lambda_{k+1}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \right\} = 0.$$

$$\xi^{\mu+3} + \sum_0^{\mu+3} {}_i \binom{\mu+3}{i} \alpha^i \eta^{\mu-i+3} + \sum_0^{\mu+1} {}_i \binom{\mu}{i} \left\{ \frac{2\mu-i+2}{\mu-i+1} \omega^i \xi^{\mu-i+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_0^{i} {}_\sigma \frac{2\mu-i+\sigma+2}{\mu-i+1} \binom{i}{\sigma} \alpha^\sigma \omega^{i-\sigma} \eta^{m-i+1} \right\} = 0.$$

$$\sum_0^{r} {}_k \eta^{r-k+1} \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r-k+2} & \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r-k+3} & \dots & \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r+2} \\ 0 & \mathfrak{g}_{r-k+3}^{r-k+3} & \dots & \mathfrak{g}_{r-k+3}^{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{g}_{r+1}^{r+2} \\ 1 & \binom{r-k+2}{r-k+1} \mathfrak{h}' & \dots & \binom{r+1}{r-k+1} \mathfrak{h}^k \end{vmatrix} + [(r+1)\xi' + (r+2)\alpha\eta' - \eta_,]\delta +$$

$$+ \delta'\xi + \delta_,\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$\omega_, = \alpha''' + 2\omega\alpha' + \alpha\omega'$, schon benutzt.

$$\delta_, - \alpha\delta' + \delta\left[\lambda_, - \alpha\lambda' - \frac{r+2}{2}\alpha'\right] = \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{g}_1'' & \dots & \mathfrak{g}_1^{r+2} \\ 0 & 1 & \dots & \mathfrak{g}_2^{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{g}_{r+1}^{r+2} \\ 1 & \mathfrak{h}' & \dots & \mathfrak{h}^{r+1} \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{g}_t^m \equiv \frac{1}{t!}\sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1}\sum_{t-2}^{m_1-1}{}_{m_2}\cdots\sum_{1}^{m_{t-2}-1}{}_{m_{t-1}}\binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2}\cdots$$

$$\cdots\binom{m_{t-2}}{m_{t-1}}\Bigg[\mathfrak{v}^{m-m_1-2} + \sum_{2}^{m-m_1-1}{}_h\frac{1}{h!}\sum_{h-1}^{m-m_1-2}{}_{l_1}\sum_{h-2}^{l_1-1}{}_{l_2}\cdots$$

$$\cdots\sum_{1}^{l_{h-2}-1}{}_{l_{h-1}}\binom{m-m_1-1}{l_1}\binom{l_1}{l_2}\cdots\binom{l_{h-2}}{l_{h-1}}\mathfrak{v}^{m-m_1-l_1-2}\mathfrak{v}^{l_1-l_2-1}\cdots$$

$$\cdots\mathfrak{v}^{l_{h-2}-l_{h-1}-1}\mathfrak{v}^{l_{h-1}-1}\Bigg]\Bigg[\mathfrak{v}^{m_1-m_2-2} + \sum\cdots\Bigg]\cdots$$

$$\cdots\Bigg[\mathfrak{v}^{m_{t-2}-m_{t-1}-2} + \sum\cdots\Bigg]\Bigg[\mathfrak{v}^{m_{t-1}-2} + \sum\cdots\Bigg]$$

$$\mathfrak{h}^m \equiv \lambda^m + \sum_{2}^{m}{}_h\frac{1}{h!}\sum_{h-1}^{m}{}_{j_1}\sum_{h-2}^{j_1-1}{}_{j_2}\cdots\sum_{1}^{j_{h-2}-1}{}_{j_{h-1}}\binom{m}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots$$

$$\cdots\binom{j_{h-2}}{j_{h-1}}\lambda^{m-j_1}\lambda^{j_1-j_2}\cdots\lambda^{j_{h-2}-j_{h-1}}\lambda^{j_{h-1}} +$$

$$+\sum_{1}^{m}{}_i\binom{\frac{r}{2}+1}{i}\sum_{i}^{m}{}_{m_1}\sum_{i-1}^{m_1-1}{}_{m_2}\cdots\sum_{1}^{m_{i-1}-1}{}_{m_i}\binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2}\cdots$$

$$\cdots\binom{m_{i-1}}{m_i}\Bigg[\lambda^{m-m_1} + \sum_{2}^{m-m_1}{}_h\frac{1}{h!}\sum_{h-1}^{m-m_1}{}_{j_1}\sum_{h-2}^{j_1-1}{}_{j_2}\cdots\sum_{1}^{j_{h-2}-1}{}_{j_{h-1}}\binom{m-m_1}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots$$

$$\cdots\binom{j_{h-2}}{j_{h-1}}\lambda^{m-m_1-j_1}\lambda^{j_1-j_2}\cdots\lambda^{j_{h-1}}\Bigg]\Bigg[\mathfrak{v}^{m_1-m_2-1} + \sum_{2}^{m_1-m_2}{}_h\frac{1}{h!}\sum_{h-1}^{m_1-m_2-1}{}_{l_1}\sum_{h-2}^{l_1-1}{}_{l_2}\cdots$$

$$\cdots\sum_{1}^{l_{h-2}-1}{}_{l_{h-1}}\binom{m_1-m_2}{l_1}\binom{l_1}{l_2}\cdots\binom{l_{h-2}}{l_{h-1}}\mathfrak{v}^{m_1-m_2-l_1-1}\mathfrak{v}^{l_1-l_2-1}\cdots$$

$$\cdots\mathfrak{v}^{l_{h-2}-l_{h-1}-1}\mathfrak{v}^{l_{h-1}-1}\Bigg]\Bigg[\mathfrak{v}^{m_2-m_3-1} + \sum\cdots\Bigg]\cdots$$

$$\cdots\Bigg[\mathfrak{v}^{m_{i-1}-m_i-1} + \sum\cdots\Bigg]\Bigg[\mathfrak{v}^{m_i-1} + \sum\cdots\Bigg].$$

$$\mathfrak{v}^n \equiv \omega^{n-1} + \frac{1}{2}\sum_1^{n-2} {}_k \binom{n-1}{k} \omega^{n-k-2}\omega^{k-1} \qquad [n > 0.]$$

$$\mathfrak{v}^0 \equiv 0.$$

7.) $$yq\,,\ p\,,\ xp\,,\ x^2p + xyq.$$

Invarianten.

$$A = \frac{x_,}{x'}\,,\ \Lambda = \log\frac{x'y_, - y'x_,}{yx'}\,,\quad \Theta = \frac{yx'' - 2x'y'}{yx'}\,,\quad B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_, - y'x_,}\,,$$

$$A',\ A_,\,,\ \Lambda',\ \Lambda_,.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_, + \alpha(\eta_, - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha_,\eta = 0$$
$$\eta_, - \alpha\eta' + \lambda'\xi + \lambda_,\eta = 0$$
$$\xi'' + \alpha\eta'' + \theta\xi' + (\alpha\theta + \alpha' - 2e^{\lambda})\eta' + \theta'\xi + \theta_,\eta = 0$$
$$\eta'' + 2\beta\xi' + (2\lambda' - \theta + 3\alpha\beta)\eta' - \beta\eta_, + \beta'\xi + \beta_,\eta = 0$$
$$\xi'_, + \alpha(\eta'_, - \xi'') - \alpha^2\eta'' + (\alpha_, - 2\alpha\alpha')\eta' + \alpha'\eta_, + \alpha''\xi + \alpha'_,\eta = 0$$
$$\xi'' + \alpha(\eta_{,,} - \xi'_,) - \alpha^2\eta'_, - \alpha_,\xi' + \alpha'\xi_, - 2\alpha\alpha_,\eta' + 2\alpha_,\eta_, + \alpha'_,\xi + \alpha_{,,}\eta = 0$$
$$\eta'_, - \alpha\eta'' + \lambda'\xi' + (\lambda_, - \alpha'_,\eta' + \lambda''\xi + \lambda'_,\eta = 0$$
$$\eta'' - \alpha\eta'_, + \lambda'\xi_, - \alpha_,\eta' + \lambda_,\eta_, + \lambda'_,\xi + \lambda_{,,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\beta_, - \alpha\beta' + \beta(\lambda_, - \alpha\lambda' - 2\alpha') = \lambda'' + \lambda'^2 - \theta\lambda'$$
$$\theta_, + 2\lambda' e^{\lambda} = \alpha'' + \theta\alpha' + \alpha\theta'.$$

8.) $$q\,,\ xq\,,\ \ldots x^rq\,,\ yq\,,\ p\,,\ xp.$$
$$[r > 0.]$$

Die sämtlichen Invarianten und Definitionsgleichungen dieses Typus bekommen wir, wenn wir in denen des neunten Typus die Constante $c = -1$ setzen.

9.) $$q\,,\ xq\,,\ \ldots x^rq\,,\ p\,,\ xp + cyq.$$
$$[r > 0,\ c \neq 1.]$$

Invarianten.

$$A_\nu^{\mu-\nu} = \left(\frac{x_,}{x'}\right)_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0, 1, \ldots r;\ \nu = 0, 1, \ldots \mu.]$$

$$\Lambda_\nu^{\mu-\nu} = \left(\log\frac{x'y_, - y'x_,}{x'^{c+1}}\right)_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0, 1, \ldots r;\ \nu = 0, 1, \ldots \mu.]$$

$$\Gamma^{\mu} = \left(\frac{x''}{x'}\right)^{\mu} \qquad [\mu = 0,\ 1,\ \ldots r - 1.]$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' \ldots & \mathfrak{A}_2^{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \mathfrak{A}_r^{r+1} \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' \ldots & \mathfrak{B}^{r+1} \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{A}_t^{m} \equiv \frac{1}{t!} \sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1} \sum_{t-2}^{m_1-1}{}_{m_2} \ldots \sum_{1}^{m_{t-2}-1}{}_{m_{t-1}} \binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2} \cdots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \cdots$$

$$\cdots \frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{x'} \frac{x^{m_{t-1}}}{x'}.$$

$$\mathfrak{B}^{m} \equiv \frac{x' y^{m} - y' x^{m}}{x' y_{,} - y' x_{,}}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_{0}^{\mu-\nu+1}{}_{i} \sum_{0}^{\nu}{}_{k} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1} \alpha_k^i \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} +$$

$$+ \sum_{0}^{\mu-\nu}{}_{i} \sum_{0}^{\nu+1}{}_{k} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu+1}{k} \alpha_k^i \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$

$$- \sum_{0}^{\mu-\nu}{}_{i} \sum_{0}^{\nu}{}_{k} \sum_{0}^{i}{}_{\sigma} \sum_{0}^{k}{}_{\tau} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \binom{i}{\sigma} \binom{k}{\tau} \alpha_\tau^\sigma \alpha_{k-\tau}^{i-\sigma} \eta^{\mu-\nu-i+1} = 0$$

$$c\, \xi_{\nu}^{\mu-\nu+1} - \eta_{\nu+1}^{\mu-\nu} + \sum_{0}^{\mu-\nu}{}_{i} \sum_{0}^{\nu}{}_{k} \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \Big\{ (c+1)\, \alpha_k^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} -$$

$$- \lambda_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} - \lambda_{k+1}^{i} \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \Big\} = 0$$

$$\xi^{\mu+2} + \sum_{0}^{\mu+2}{}_{i} \binom{\mu+2}{i} \alpha^i \eta^{\mu-i+2} + \sum_{0}^{\mu+1}{}_{i} \binom{\mu+1}{i} \Big\{ \gamma^i \xi^{\mu-i+1} +$$

$$+ \sum_{0}^{i}{}_{\sigma} \binom{i}{\sigma} \alpha^\sigma \gamma^{i-\sigma} \eta^{\mu-i+1} \Big\} = 0$$

$$\sum_{0}^{r}{}_{k}\, \eta^{r-k+1} \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r-k+2} & \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r-k+3} & \ldots & \mathfrak{g}_{r-k+2}^{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{g}_{r+1}^{r+2} \\ 1 & \binom{r-k+2}{r-k+1}\mathfrak{h}'' & \ldots & \binom{r+2}{r-k+1}\mathfrak{h}^{k} \end{vmatrix} + \delta[(r+1)\xi' + (r+2)\alpha\eta' - \eta_{,}]$$
$$+ \delta'\xi + \delta_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\gamma_{,} = \alpha'' + \alpha\gamma' + \gamma\alpha'$$

$$\delta_{,} - \alpha\delta' + \delta[\lambda_{,} - \alpha\lambda' + (c - r - 1)\alpha'] = \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{g}_1'' & \mathfrak{g}_1''' & \dots & \mathfrak{g}_1^{r+2} \\ 0 & 1 & \mathfrak{g}_2''' & \dots & \mathfrak{g}_2^{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathfrak{g}_{r+1}^{r+2} \\ 1 & \mathfrak{h}' & \mathfrak{h}'' & \dots & \mathfrak{h}^{r+1} \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{g}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1} \sum_{t-2}^{m_1-1}{}_{m_2} \cdots \sum_{1}^{m_{t-2}-1}{}_{m_{t-1}} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \cdots$$

$$\cdots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \Bigg[\gamma^{m-m_1-2} + \sum_{2}^{m-m_1-1}{}_{h} \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m-m_1-2}{}_{l_1} \sum_{h-2}^{l_1-1}{}_{l_2} \cdots$$

$$\cdots \sum_{1}^{l_{h-2}-1}{}_{l_{h-1}} \binom{m - m_1 - 1}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \cdots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \gamma^{m-m_1-l_2-2} \gamma^{l_1-l_2-1} \cdots$$

$$\cdots \gamma^{l_{h-2}-l_{h-1}} \gamma^{l_{h-1}-1} \Bigg] \cdots \Bigg[\gamma^{m_{t-1}-2} + \sum \cdots \Bigg].$$

$$\mathfrak{h}^m \equiv \lambda^m + \sum_{2}^{m}{}_{h} \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m-1}{}_{j_1} \sum_{h-2}^{j_1-1}{}_{j_2} \cdots \sum_{1}^{j_{h-2}-1}{}_{j_{h-1}} \binom{m}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots$$

$$\cdots \binom{j_{h-2}}{j_{h-1}} \lambda^{m-j_1} \lambda^{j_1-j_2} \cdots \lambda^{j_{h-2}-j_{h-1}} \lambda^{j_{h-1}} +$$

$$+ \sum_{1}^{m}{}_{i} \binom{c+1}{i} \sum_{i}^{m}{}_{m_1} \sum_{i-1}^{m_1-1}{}_{m_2} \cdots \sum_{1}^{m_{i-1}-1}{}_{m_i} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \cdots$$

$$\cdots \binom{m_{i-1}}{m_i} \Bigg[\lambda^{m-m_1} + \sum_{2}^{m-m_1}{}_{h} \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m-m_1-1}{}_{j_1} \cdots \Bigg] \Bigg[\gamma^{m_1-m_2-1} +$$

$$\sum_{2}^{m_1-m_2}{}_{h} \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m_1-m_2-1}{}_{l_1} \sum_{h-2}^{l_1-1}{}_{l_2} \cdots \sum_{1}^{l_{h-2}-1}{}_{l_{h-1}} \binom{m_1 - m_2}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \cdots$$

$$\cdots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \gamma^{m_1-m_2-l_1-1} \gamma^{l_1-l_2-1} \cdots \gamma^{l_{h-2}-l_{h-1}-1} \gamma^{l_{h-1}-1} \Bigg] \cdots$$

$$\cdots \Bigg[\gamma^{m_{h-1}-1} + \sum \cdots \Bigg].$$

10.) $q\,,\ xq\,,\ \ldots x^{r-1}q\,,\ p\,,\ xp + (ry + x^r)q.$
$[r > 1.]$

Invarianten.

$$\varDelta_\nu^{\mu-\nu} = \left(\frac{x_{\prime}}{x'}\right)_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0,\ 1,\ \ldots r-1;\ \nu = 0,\ 1,\ \ldots \mu.]$$

$$\varDelta_\nu^{\mu-\nu} = \left(\log \frac{x'y_{\prime} - y'x_{\prime}}{x'^{r+1}}\right)_\nu^{\mu-\nu} \quad [\mu = 0,\ 1,\ \ldots r-1;\ \nu = 0,\ 1,\ \ldots \mu.]$$

$$\Gamma^\mu = \left(\frac{x''}{x'}\right)^\mu \qquad [\mu = 0,\ 1,\ \ldots r-2.]$$

$$\varDelta = \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' & \ldots & \mathfrak{A}_2^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \mathfrak{A}_{r-1}^r \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \ldots & \mathfrak{B}^r \end{vmatrix} - \dfrac{r!\cdot(x')^{r+1}\log x'}{x'y_{\prime} - y'x_{\prime}}}{}.$$

$$\mathfrak{A}_t^m \equiv \frac{1}{t!}\sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1}\sum_{t-2}^{m_1-1}{}_{m_2}\cdots\sum_{1}^{m_{t-2}-1}{}_{m_{t-1}}\binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2}\cdots\binom{m_{t-2}}{m_{t-1}}\frac{x^{m-m_1}}{x'}\,\frac{x^{m_1-m_2}}{x'}\cdots$$
$$\cdots\frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{x'}\,\frac{x^{m_{t-1}}}{x'}.$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x'y^m - y'x^m}{x'y_{\prime} - y'x_{\prime}}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i\sum_0^{\nu}{}_k\binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1}\,\alpha_k^i\,\xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} +$$
$$+\sum_0^{\mu-\nu}{}_i\sum_0^{\nu+1}{}_k\binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu+1}{k}\alpha_k^i\,\eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$
$$-\sum_0^{\mu-\nu}{}_i\sum_0^{\nu}{}_k\sum_0^{i}{}_\sigma\sum_0^{k}{}_\tau\binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau}\alpha_\tau^\sigma\,\alpha_{k-\tau}^{i-\sigma}\,\eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0.$$

$$r\,\xi_\nu^{\mu-\nu+1} - \eta_{\nu+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu}{}_i\sum_0^{\nu}{}_k\binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\Big\{(r+1)\,\alpha_k^i\,\eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} -$$
$$-\lambda_k^{i+1}\,\xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} - \lambda_{k+1}^i\,\eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i}\Big\} = 0.$$

$$\xi^{\mu+2} + \sum_0^{\mu+2}{}_i\binom{\mu+2}{i}\alpha^i\eta^{\mu-i+2} + \sum_0^{\mu+1}{}_i\binom{\mu+1}{i}\Big\{\gamma^i\,\xi^{\mu-i+1} +$$
$$+\sum_0^{i}{}_\sigma\binom{i}{\sigma}\alpha^\sigma\gamma^{i-\sigma}\,\eta^{\mu-i+1}\Big\} = 0.$$

$$\sum_{0}^{r-1} {}_k\, \eta^{r-k} \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_{r-k+1}^{r-k+1} & \mathfrak{g}_{r-k+1}^{r-k+2} & \dots & \mathfrak{g}_{r-k+1}^{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{g}_r^{r+1} \\ 1 & \binom{r-k+1}{r-k+1}\mathfrak{h}' & \dots & \binom{r}{r-k}\mathfrak{h}^k \end{vmatrix} + \frac{r!}{\lambda}[\xi' + \alpha\eta'] + \delta[r\xi' + (r+1)\alpha\eta' - \eta_{,}] + \delta'\xi + \delta_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\gamma_{,} = \alpha'' + \alpha\gamma' + \gamma\alpha'$$

$$\delta_{,} - \alpha\delta' + \delta(\lambda_{,} - \alpha\lambda') + r\alpha' e^{-\lambda} = \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{g}_1'' & \mathfrak{g}_1''' & \dots & \mathfrak{g}_1^{r+1} \\ 0 & 1 & \mathfrak{g}_2''' & \dots & \mathfrak{g}_2^{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathfrak{g}_r^{r+1} \\ 1 & \mathfrak{h}' & \mathfrak{h}'' & \dots & \mathfrak{h}^r \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{g}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1} \sum_{t-2}^{m_1-1}{}_{m_2} \cdots \sum_{1}^{m_{t-2}-1}{}_{m_{t-1}} \binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2}\cdots\binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \Big[\gamma^{m-m_1-2} +$$

$$+ \sum_{2}^{m-m_1-1}{}_h \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m-m_1-2}{}_{l_1} \sum_{h-2}^{l_1-1}{}_{l_2} \cdots \sum_{1}^{l_{h-2}-1}{}_{l_{h-1}} \binom{m-m_1-1}{l_1}\binom{l_1}{l_2}\cdots$$

$$\cdots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \gamma^{m-m_1-l_1-2} \gamma^{l_1-l_2-1} \cdots \gamma^{l_{h-1}-1}\Big] \cdots \Big[\gamma^{m_{t-2}-2} + \sum \cdots\Big]$$

$$\mathfrak{h}^m \equiv \lambda^m + \sum_{0}^{m}{}_h \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m-1}{}_{j_1} \sum_{h-2}^{j_1-1}{}_{j_2} \cdots \sum_{1}^{j_{h-2}-1}{}_{j_{h-1}} \binom{m}{j_1}\binom{j_1}{j_2}\cdots$$

$$\cdots \binom{j_{h-2}}{j_{h-1}} \lambda^{m-j_1}\lambda^{j_1-j_2}\cdots\lambda^{j_{h-2}-j_{h-1}}\lambda^{j_{h-1}} +$$

$$+ \sum_{1}^{m}{}_i \binom{r+1}{i} \sum_{i}^{m}{}_{m_1} \sum_{i-1}^{m_1-1}{}_{m_2} \cdots \sum_{1}^{m_{i-1}-1}{}_{m_i} \binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2}\cdots$$

$$\cdots \binom{m_{i-1}}{m_i} \Big[\lambda^{m-m_1} + \sum_{2}^{m-m_1}{}_h \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m-m_1-1}{}_{j_1} \cdots\Big] \cdot$$

$$\cdot \Big[\gamma^{m_1-m_2-1} + \sum_{2}^{m_1-m_2}{}_h \frac{1}{h!} \sum_{h-1}^{m_1-m_2-1}{}_{l_1} \sum_{h-2}^{l_1-1}{}_{l_2} \cdots \sum_{1}^{l_{h-2}-1}{}_{l_{h-1}} \binom{m_1-m_2}{l_1}\binom{l_1}{l_2}\cdots$$

$$\cdots \binom{l_{h-2}}{l_{h-1}} \gamma^{m_1-m_2-l_1-1} \gamma^{l_1-l_2-1} \cdots \gamma^{l_{h-2}-l_{h-1}-1} \gamma^{l_{h-1}-1}\Big] \cdots$$

$$\cdots \Big[\gamma^{m_{h-1}-1} + \sum \cdots\Big] \cdot$$

11.) $q, \; xq, \; \dots x^m q, \; \mathrm{e}^{\alpha_k x} q, \; x\mathrm{e}^{\alpha_k x} q, \; \dots x^{m_k} \mathrm{e}^{\alpha_k x} q, \; yq, \; p.$

$$\left[k = 1, 2, \dots l; \; l \gtreqless 0; \; l + m + \sum_1^l{}^k m_k > 0; \; \alpha_1 = 1.\right]$$

Invarianten.

$$P_\nu^{\mu-\nu} = x_\nu^{\mu-\nu} \qquad \left[\mu = 1, 2, \dots 1 + l + m + \sum_1^l{}^k m_k; \; \nu = 0, 1, \dots \mu.\right]$$

$$\varDelta_\nu^{\mu-\nu} = (\log(x'y_, - y'x_,))_\nu^{\mu-\nu} \left[\mu = 1, 2, \dots l + m + \sum_1^l{}^k m_k; \; v = 0, 1, \dots \mu.\right]$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' & \dots & \mathfrak{A}_2^s \\ 0 & \mathfrak{A}_3''' & \dots & \mathfrak{A}_3^s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{A}_{s-1}^s \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \dots & \mathfrak{B}^s \end{vmatrix}$$

$$s \equiv 1 + l + m + \sum_1^l{}^k m_k.$$

$$\mathfrak{A}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{t-1}^{m-1}{}^{m_1} \sum_{t-2}^{m_1-1}{}^{m_2} \cdots \sum_1^{m_{t-2}-1}{}^{m_{t-1}} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \cdots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \cdots$$

$$\cdots \frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{x'} \frac{x^{m_{t-1}}}{x'}.$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x'y^m - y'x^m}{x'y_, - y'x_,}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-\nu}{}^i \sum_0^\nu{}^k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \left\{\varrho_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \varrho_{k+1}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i}\right\} = 0$$

$$\xi_\nu^{\mu-\nu+1} + \eta_{\nu+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu}{}^i \sum_0^\nu{}^k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \left\{\lambda_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \lambda_{k+1}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i}\right\} = 0$$

$$\sum_0^{s-1}{}^k \eta^{s-k} \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_{s-k+1}^{s-k+1} & \mathfrak{g}_{s-k+1}^{s-k+2} & \dots & \mathfrak{g}_{s-k+1}^{s+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{g}_s^{s+1} \\ 1 & \binom{s-k+1}{s-k} \mathfrak{h}' & \dots & \binom{s}{s-k} \mathfrak{g}^k \end{vmatrix} + \delta\left[s\xi' + (s+1)\frac{\varrho_,}{\varrho'}\eta' - \eta_,\right] +$$

$$+ \delta'\xi + \delta_,\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$(\varrho')_, = (\varrho_,)'$, u. s. w., schon benutzt.

$$\delta_, - \frac{\varrho_,}{\varrho'}\delta' + \delta\left[\lambda_, - \frac{\varrho_,}{\varrho'}\lambda' - (s+1)\left(\frac{\varrho_,}{\varrho'}\right)'\right] = \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{g}_1'' & \mathfrak{g}_1''' & \ldots & \mathfrak{g}^{s+1} \\ 0 & 1 & \mathfrak{g}_2''' & \ldots & \mathfrak{g}_2^{s+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{g}_s^{s+1} \\ 1 & \mathfrak{h}' & \mathfrak{h}'' & \ldots & \mathfrak{h}^s \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{g}_t^m \equiv \frac{1}{t!}\sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1}\sum_{t-2}^{m_1-1}{}_{m_2}\cdots\sum_{1}^{m_{t-2}-1}{}_{m_{t-1}}\binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2}\cdots\binom{m_{t-2}}{m_{t-1}}\frac{\varrho^{m-m_1}}{\varrho'}\frac{\varrho^{m_1-m_2}}{\varrho'}\cdots$$

$$\cdots\frac{\varrho^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{\varrho'}\frac{\varrho^{m_{t-1}}}{\varrho'}.$$

$$\mathfrak{h}^m \equiv \lambda^m + \sum_2^m{}_h\frac{1}{h!}\sum_{h-1}^{m-1}{}_{m_1}\sum_{h-2}^{m_1-1}{}_{m_2}\cdots\sum_1^{m_{h-2}-1}{}_{m_{h-1}}\binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2}\cdots$$

$$\cdots\binom{m_{h-2}}{m_{h-1}}\lambda^{m-m_1}\lambda^{m_1-m_2}\cdots\lambda^{m_{h-2}-m_{h-1}}\lambda^{m_{h-1}}.$$

12.) $$q,\quad xq,\quad F_1(x)q,\quad \ldots F_r(x)q.$$
$[r \gtreqless 0.)$

Invarianten.

$P_\nu^{\mu-\nu} = x_\nu^{\mu-\nu}$ $\quad[\mu = 0, 1, \ldots r+2;\ \nu = 0, 1, \ldots \mu.]$

$\mathit{\Delta}_\nu^{\mu-\nu} = (\log(x'y_, - y'x_,))_\nu^{\mu-\nu}$ $\quad[\mu = 1, 2, \ldots r+1;\ \nu = 0, 1, \ldots \mu.]$

$$\mathit{\Delta} = \begin{vmatrix} F_1'' & F_1''' & \ldots & F_1^{(r+2)} \\ F_2'' & F_2''' & \ldots & F_2^{(r+2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_r'' & F_r''' & \ldots & F_r^{(r+2)} \\ (x')^r\mathfrak{D}_2 & (x')^{r-1}\mathfrak{D}_3 & \ldots & \mathfrak{D}_{r+2} \end{vmatrix}$$

$$F_i^{(n)} \equiv \frac{d^n F_i(x)}{dx^n}.$$

$$\mathfrak{D}_n \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_2'' & \mathfrak{A}_2''' & \dots & \mathfrak{A}_2^n \\ 0 & \mathfrak{A}_3''' & \dots & \mathfrak{A}_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{A}_{n-1}^n \\ \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \dots & \mathfrak{B}^n \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{A}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1} \sum_{t-2}^{m_1-1}{}_{m_2} \cdots \sum_{1}^{m_{t-2}-1}{}_{m_{t-1}} \binom{m}{m_1} \binom{m_1}{m_2} \cdots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{x^{m-m_1}}{x'} \frac{x^{m_1-m_2}}{x'} \cdots$$

$$\cdots \frac{x^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{x'} \frac{x^{m_{t-1}}}{x'} .$$

$$\mathfrak{B}^m \equiv \frac{x' y^m - y' x^m}{x' y_{,} - y' x_{,}} .$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \left\{ \varrho_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \varrho_{k+1}^{i} \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \right\} = 0 .$$

$$\xi_\nu^{\mu-\nu+1} + \eta_{\nu+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i} \binom{\nu}{k} \left\{ \lambda_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \lambda_{k+1}^{i} \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \right\} = 0 .$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{f}_{,}'' & \mathfrak{f}_{,}''' & \dots & \mathfrak{f}_{,}^{(r+2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{f}_r'' & \mathfrak{f}_r''' & \dots & \mathfrak{f}_r^{(r+2)} \\ (\varrho')^r \mathfrak{d}_2 & (\varrho')^{r-1} \mathfrak{d}_3 & \dots & \mathfrak{d}_{r+2} \end{vmatrix} + \delta \left[(r+2)\, \xi' + (r+3) \frac{\varrho_{,}}{\varrho'} \eta' - \eta_{,} \right] + \\ + \delta' \xi + \delta_{,} \eta = 0 .$$

Integrabilitätsbedingungen.

$(\varrho')_{,} = (\varrho_{,})'$, u. s. w.

$$\delta_{,} - \frac{\varrho_{,}}{\varrho'} \delta' + \delta \left[\lambda_{,} - \frac{\varrho_{,}}{\varrho'} \lambda' - (r+4) \left(\frac{\varrho_{,}}{\varrho'} \right)' \right] = \begin{vmatrix} \mathfrak{f}_1'' & \mathfrak{f}_1''' & \mathfrak{f}_1^{IV} & \dots & \mathfrak{f}_1^{(r+2)} \\ \mathfrak{f}_2'' & \mathfrak{f}_2''' & \mathfrak{f}_2^{IV} & \dots & \mathfrak{f}_2^{(r+2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{f}_r'' & \mathfrak{f}_r''' & \mathfrak{f}_r^{IV} & \dots & \mathfrak{f}_r^{(r+2)} \\ (\varrho')^r \mathfrak{e}_2 & (\varrho')^{r-1} \mathfrak{e}_3 & (\varrho')^{r-2} \mathfrak{e}_4 & \dots & \mathfrak{e}_{r-2} \end{vmatrix}$$

$\mathfrak{f}_i^{(n)} \equiv F_i^{(n)}(\varrho)$.

$$\mathfrak{d}_n \equiv \sum_{0}^{n-1}{}_k\, \eta^{n-k} \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_{n-k+1}^{n-k+1} & \mathfrak{g}_{n-k+1}^{n-k+2} & \cdots & \mathfrak{g}_{n-k+1}^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{g}_n^{n+1} \\ 1 & \binom{n-k+1}{n-k}\mathfrak{h}' & \cdots & \binom{n}{n-k}\mathfrak{h}^k \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{e}_n \equiv \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{g}_1'' & \mathfrak{g}_1''' & \cdots & \mathfrak{g}_1^{n+2} \\ 0 & 1 & \mathfrak{g}_2''' & \cdots & \mathfrak{g}_2^{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{g}_{n+1}^{n+2} \\ 1 & \mathfrak{h}' & \mathfrak{h}'' & \cdots & \mathfrak{h}^{n+1} \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{g}_t^m \equiv \frac{1}{t!} \sum_{t-1}^{m-1}{}_{m_1} \sum_{t-2}^{m_1-1}{}_{m_2} \cdots \sum_{1}^{m_{t-2}-1}{}_{m_{t-1}} \binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2} \cdots \binom{m_{t-2}}{m_{t-1}} \frac{\varrho^{m-m_1}}{\varrho'} \frac{\varrho^{m_1-m_2}}{\varrho'} \cdots$$
$$\cdots \frac{\varrho^{m_{t-2}-m_{t-1}}}{\varrho'} \frac{\varrho^{m_{t-1}}}{\varrho'}.$$

$$\mathfrak{h}^m \equiv \lambda^m + \sum_{2}^{m}{}_i \frac{1}{i!} \sum_{i-1}^{m-1}{}_{m_1} \sum_{i-1}^{m_1-1}{}_{m_2} \cdots \sum_{1}^{m_{i-1}-1}{}_{m_i} \binom{m}{m_1}\binom{m_1}{m_2} \cdots$$
$$\cdots \binom{m_{i-1}}{m_i} \lambda^{m-m_1} \lambda^{m_1-m_2} \cdots \lambda^{m_{i-1}-m_i} \lambda^{m_i}.$$

13.) $q, \ xq, \ x^2q, \ p, \ xp + yq, \ x^2p + 2xyq.$

$$\Lambda_\nu^{\mu-\nu} = \left(\frac{x_{,}}{x'}\right)_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0, 1, 2; \ \nu = 0, 1, \ldots \mu.]$$

$$\Lambda_\nu^{\mu-\nu} = \left(\log \frac{x'y_{,} - y'x_{,}}{2x'^2}\right)_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0, 1, 2; \ \nu = 0, 1, \ldots \mu.]$$

$$\Omega = \frac{2x'x''' - 3x''^2}{2x'^2}$$

$$\Delta = \frac{x'y''' - y'x'''}{x'y_{,} - y'x_{,}} - 3\frac{x''}{x'} \cdot \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_{,} - y'x_{,}}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1}\,\alpha_k^i\,\xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} +$$

$$+\sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu+1}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu+1}{k}\,\alpha_k^i\,\eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$

$$-\sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \sum_0^{i}{}_\sigma \sum_0^{k}{}_\tau \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau}\,\alpha_\tau^\sigma\,\alpha_{k-\tau}^{i-\sigma}\,\eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0.$$

$$\xi_\nu^{\mu-\nu+1} - \eta_{\nu+1}^{\mu-\nu} + \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\left\{2\alpha_k^i\,\eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} - \lambda_k^{i+1}\,\xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} -\right.$$

$$\left. - \lambda_{k+1}^i\,\eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i}\right\} = 0.$$

$$\xi''' + \alpha\eta''' + 3\alpha'\eta'' + 2\omega\xi' + (2\alpha\omega + 3\alpha'')\eta' + \omega'\xi + \omega_{,}\eta = 0$$

$$\eta''' + 3\lambda'\eta'' + 3\delta\xi' + (4\alpha\delta + 3\lambda'' + 3\lambda'^2 + 2\omega)\eta' - \delta\eta_{,} + \delta'\xi + \delta_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\omega_{,} = \alpha''' + 2\omega\alpha' + \alpha\omega'.$$

$$\delta_{,} - \alpha\delta' + \delta(\lambda_{,} - \alpha\lambda' - 2\alpha') = \lambda''' + 3\lambda'\lambda'' + \lambda'^3 + 2\omega\lambda' + \omega'.$$

14.) $p,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq.$

Invarianten.

$$Z = \log\frac{x'}{y^2},\quad A = \frac{x_{,}}{x'},\quad \Lambda = \log\frac{x'y_{,} - y'x_{,}}{y^3},\quad B = \frac{x'y'' - y'x''}{x'y_{,} - y'x_{,}},$$

$$Z',\ A',\ A_{,},\ \Lambda',\ \Lambda_{,}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi' + \alpha\eta' + \zeta'\xi + \zeta_{,}\eta = 0$$

$$\xi_{,} + \alpha(\eta_{,} - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha_{,}\eta = 0$$

$$\xi' + \eta_{,} + \lambda'\xi + \lambda_{,}\eta = 0$$

$$\eta'' + 2\beta\xi' + (2\lambda' - 3\zeta' + 3\alpha\beta)\eta' - \beta\eta_{,} + \beta'\xi + \beta_{,}\eta = 0$$

$$\xi'' + \alpha\eta'' + \zeta'\xi' + (\alpha\zeta' + 2\alpha' - e^{\lambda-\zeta})\eta' + \zeta''\xi + \zeta'_{,}\eta = 0$$

$$\xi'_{,} + \alpha(\eta'_{,} - \xi'') - \alpha^2\eta'' + (\alpha_{,} - 2\alpha\alpha')\eta' + \alpha'\eta_{,} + \alpha''\xi + \alpha'_{,}\eta = 0$$

$$\xi'' + \alpha(\eta_{,,} - \xi'_{,}) - \alpha^2\eta'_{,} - \alpha_{,}\xi' + \alpha'\xi_{,} - 2\alpha\alpha_{,}\eta' + 2\alpha_{,}\eta_{,} + \alpha'_{,}\xi + \alpha_{,,}\eta = 0$$

$$\xi'' + \eta'_{,} + \lambda'\xi' + \lambda_{,}\eta' + \lambda''\xi + \lambda'_{,}\eta = 0$$

$$\xi'_{,} + \eta_{,,} + \lambda'\xi_{,} + \lambda_{,}\eta_{,} + \lambda'_{,}\xi + \lambda_{,,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\beta_{,} - \alpha\beta' + \beta(\lambda_{,} - \alpha\lambda' + 2\alpha\zeta' - 2\zeta_{,} + \alpha') = \lambda'' + \lambda'^2 - 3\lambda'\zeta' - \zeta'' + 2\zeta'^2$$
$$\zeta_{,} = \alpha\zeta' + \alpha' - e^{\lambda - \zeta}.$$

15.) $$q, \; xq, \; \ldots x^r q, \; p, \; xp + yq.$$
$$[r > 0.]$$

Die sämtlichen Invarianten und Definitionsgleichungen dieses Typus bekommen wir, wenn wir in denen des neunten Typus die Constante $c = 1$ setzen.

16.) $$q, \; p, \; xp + (x + y)q.$$

Invarianten.

$$A = \frac{x_{,}}{x'}$$

$$Z = \frac{y'}{x'} - \log x'$$

$$\varDelta = \log \frac{x'y_{,} - y'x_{,}}{x'^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{,} + \alpha(\eta_{,} - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha_{,}\eta = 0$$
$$\xi' + (\alpha - \lambda)\eta' - \zeta'\xi - \zeta_{,}\eta = 0$$
$$\xi' + 2\alpha\eta' - \eta_{,} - \lambda'\xi - \lambda_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$e^{-\lambda}[\zeta_{,,} - 2\alpha\zeta'_{,} + \alpha^2\zeta'' + \alpha'_{,} - \alpha\alpha'' - \alpha'\zeta_{,} + \alpha\lambda'\zeta_{,} - \alpha_{,}\zeta' + 2\alpha\alpha'\zeta' - \lambda_{,}\zeta' +$$
$$+ \alpha\lambda_{,}\zeta' - \alpha^2\lambda'\zeta' - \alpha'^2 - \alpha'\lambda_{,} + \alpha\alpha'\lambda'] - \lambda'_{,} + \alpha\lambda'' - \alpha'' + \alpha'\lambda' = 0.$$

17.) $$e^{\alpha_k x}q, \; xe^{\alpha_k x}q, \; \ldots x^{m_k} e^{\alpha_k x}q, \; p.$$
$$\left[\alpha_1(\alpha_1 - 1) = 0; \; k = 1, 2, \ldots l; \; l > 0; \; l + \sum_1^l {}_k m_k > 1.\right]$$

Dieser Typus unterscheidet sich von dem Typus 11.) nur in dem Besitz der Invariante $\log(x'y_{,} - y'x_{,})$ und der daraus folgenden Gleichung. Alle übrigen Invarianten, Definitionsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen stimmen mit den zu jenem Falle gehörigen überein.

18.) $$q\,,\; xq\,,\; F_1(x)q\,,\; \ldots F_r(x)q.$$
$$[r \gtreqless 0.]$$

Dieser Typus unterscheidet sich von dem Typus 12.) nur in dem Besitz der Invariante $\log(x'y_, - y'x_,)$ und der daraus folgenden Gleichung. Alle übrigen Invarianten, Definitionsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen stimmen mit den zu jenem Falle gehörigen überein.

19.) $$q\,,\; yq\,,\; y^2q\,,\; p\,,\; xp\,,\; x^2p.$$

Invarianten.

$$\mathcal{A}_\nu^{\mu-\nu} = \left(\frac{x_,}{x'}\right)_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0, 1, 2;\; \nu = 0, \ldots \mu.]$$

$$\Phi_\nu^{\mu-\nu} = \left(\frac{y'}{y_,}\right)_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0, 1, 2;\; \nu = 0, \ldots \mu.]$$

$$\Omega = \frac{2x'x''' - 3x''^2}{2x'^2}$$

$$\Theta = \frac{2y_,y_{,,,} - 3y_{,,}^2}{2y_,^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k} \frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1}\, \alpha_k^i\, \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} +$$
$$+ \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu+1}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu+1}{k} \alpha_k^i\, \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$
$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \sum_0^{i}{}_\sigma \sum_0^{k}{}_\tau \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau} \alpha_\tau^\sigma\, \alpha_{k-\tau}^{i-\sigma}\, \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0.$$

$$\eta_\nu^{\mu-\nu+1} + \sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu+1}{i}\binom{\nu}{k} \varphi_k^i\, \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} -$$
$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu+1}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{i} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1}\, \varphi_k^i\, \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$
$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \sum_0^{i}{}_\sigma \sum_0^{k}{}_\tau \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau} \varphi_\tau^\sigma\, \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma}\, \xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} = 0.$$

$$\xi''' + \alpha\eta''' + 3\alpha'\eta'' + 2\omega\xi' + (3\alpha'' + 2\alpha\omega)\eta' + \omega'\xi + \omega_,\eta = 0$$
$$\eta_{,,,} + \varphi\xi_{,,,} + 3\varphi_,\xi_{,,} + (3\varphi_{,,} + 2\varphi\theta)\xi_, + 2\theta\eta_, + \theta'\xi + \theta_,\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\omega_{,} = \alpha''' + 2\omega\alpha' + \alpha\omega'$$
$$\theta' = \varphi_{,,,} + 2\theta\varphi_{,} + \varphi\theta_{,}.$$

20.) $p + q\,,\ xp + yq\,,\ x^2p + y^2q.$

Invarianten.

$$\varDelta = \frac{x_{,}}{x'}\,,\quad \varPhi = \frac{y'}{y_{,}}\,,\quad E = \log\frac{x'y_{,} - y'x_{,}}{(x-y)^2}\,.$$

Die Definitionsgleichungen dieses Typus bekommen wir, wenn wir in denen des 25. Typus die Constante $c = -1$ setzen.

21.) $q\,,\ yq\,,\ y^2q\,,\ p\,,\ xp.$

Invarianten.

$$\varDelta_{\nu}^{\mu-\nu} = \left(\frac{x_{,}}{x'}\right)_{\nu}^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0\,,\ 1\,,\ 2;\ \nu = 0\,,\ \ldots\,\mu.]$$

$$\Gamma^{\mu} = \left(\frac{x''}{x'}\right)^{\mu} \qquad [\mu = 0\,,\ 1.]$$

$$\varPhi_{\nu}^{\mu-\nu} = \left(\frac{y'}{y_{,}}\right)_{\nu}^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0\,,\ 1\,,\ 2;\ \nu = 0\,,\ \ldots\,\mu.]$$

$$\Theta = \frac{2y_{,}y_{,,,} - 3y_{,,}^2}{2y_{,}^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{\nu+1}^{\mu-\nu} - \sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\frac{\mu-\nu-2i+1}{\mu-\nu-i+1}\,\alpha_k^i\,\xi_{\nu+k}^{\mu-\nu-i+1} +$$
$$+ \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu+1}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu+1}{k}\,\alpha_k^i\,\eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$
$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \sum_0^{i}{}_\sigma \sum_0^{k}{}_\tau \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau}\,\alpha_\tau^\sigma\,\alpha_{k-\tau}^{i-\sigma}\,\eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} = 0\,.$$

$$\xi^{\mu+2} + \sum_0^{\mu+2}{}_i \binom{\mu+2}{i}\,\alpha^i\,\eta^{\mu-i+2} +$$
$$+ \sum_0^{\mu+1}{}_i \binom{\mu+1}{i}\left\{\gamma^i\,\xi^{\mu-i+1} + \sum_0^{i}{}_\sigma \binom{i}{\sigma}\,\alpha^\sigma\,\gamma^{i-\sigma}\,\eta^{\mu-i+1}\right\} = 0\,.$$

$$\eta_\nu^{\mu-\nu+1} + \sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu+1}{i}\binom{\nu}{k} \varphi_k^i \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu+1}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1} \varphi_k^i \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \sum_0^{i}{}_\sigma \sum_0^{k}{}_\tau \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau} \varphi_\tau^\sigma \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma} \xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} = 0.$$

$$\eta_{\prime\prime\prime} + \varphi\xi_{\prime\prime\prime} + 3\varphi_\prime \xi_{\prime\prime} + (3\varphi_{\prime\prime} + 2\varphi\theta)\xi_\prime + 2\theta\eta_\prime + \theta'\xi + \theta_\prime \eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$\theta' = \varphi_{\prime\prime\prime} + \theta\varphi_\prime + 2\varphi\theta_\prime$.

Die Bedingung $\gamma_\prime = \alpha'' + \alpha\gamma' + \gamma\alpha'$ ist schon benutzt worden.

22.) $q, \; yq, \; y^2 q, \; p.$

Invarianten.

$P_\nu^{\mu-\nu} = x_\nu^{\mu-\nu}$ $[\mu = 1, 2, 3; \; \nu = 0, \ldots \mu.]$

$\Phi_\nu^{\mu-\nu} = \left(\frac{y'}{y_\prime}\right)_\nu^{\mu-\nu}$ $[\mu = 0, 1, 2; \; \nu = 0, \ldots \mu.]$

$$\Theta = \frac{2y_\prime y_{\prime\prime\prime} - 3y_{\prime\prime}^2}{2y_\prime^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k} \left\{ \varrho_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \varrho_{k+1}^i \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \right\} = 0$$

$$\eta_\nu^{\mu-\nu+1} + \sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu+1}{i}\binom{\nu}{k} \varphi_k^i \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu+1}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1} \varphi_k^i \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \sum_0^{i}{}_\sigma \sum_0^{k}{}_\tau \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau} \varphi_\tau^\sigma \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma} \xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} = 0.$$

$$\eta_{\prime\prime\prime} + \varphi\xi_{\prime\prime\prime} + 3\varphi_\prime \xi_{\prime\prime} + (3\varphi_{\prime\prime} + 2\varphi\theta)\xi_\prime + 2\theta\eta_\prime + \theta'\xi + \theta'\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$\theta' = \varphi_{\prime\prime\prime} + \theta\varphi_\prime + 2\varphi\theta_\prime$.

23.) $q\,,\; yq\,,\; y^2 q\,.$

Invarianten.

$$P_\nu^{\mu-\nu} = x_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0, 1, 2, 3;\; \nu = 0, 1, \ldots \mu.]$$

$$\Phi_\nu^{\mu-\nu} = \left(\frac{y'}{y_{,}}\right)_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0, 1, 2;\; \nu = 0, \ldots \mu.]$$

$$\Theta = \frac{2 y_{,} y_{,,,} - 3 y_{,,}^2}{2 y_{,}^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu}{i}\binom{\nu}{k} \left\{\varrho_k^{i+1}\, \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \varrho_{k+1}^{i}\, \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i}\right\} = 0$$

$$\eta_\nu^{\mu-\nu+1} + \sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu+1}{i}\binom{\nu}{k} \varphi_k^i\, \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu+1}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1}\, \varphi_k^i\, \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \sum_0^{i}{}_\sigma \sum_0^{k}{}_\tau \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau} \varphi_\tau^\sigma\, \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma}\, \xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} = 0.$$

$$\eta_{,,,} + \varphi\,\xi_{,,,} + 3\varphi_{,}\,\xi_{,,} + (3\varphi_{,,} + 2\varphi\theta)\,\xi_{,} + 2\theta\,\eta_{,} + \theta'\xi + \theta_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\theta' = \varphi_{,,,} + \theta\varphi_{,} + 2\varphi\theta_{,}.$$

24.) $q\,,\; yq\,,\; p\,,\; xp.$

$$A = \frac{x_{,}}{x'}\,,\quad \Phi = \frac{y'}{y_{,}}\,,\quad \Gamma = \frac{x''}{x'}\,,\quad A',\quad A_{,}\,,\quad \Phi',\quad \Phi_{,}\,,\quad \Psi = \frac{y_{,,}}{y_{,}}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{,} + \alpha(\eta_{,} - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha_{,}\eta = 0$$

$$\eta' + \varphi(\xi' - \eta_{,}) - \varphi^2\xi_{,} + \varphi'\xi + \varphi_{,}\eta = 0$$

$$\xi'' + \alpha\eta'' + \gamma\xi' + (2\alpha' + \alpha\gamma)\eta' + \gamma'\xi + \gamma_{,}\eta = 0$$

$$\xi'_{,} + \alpha(\eta'_{,} - \xi'') - \alpha^2\eta'' + (\alpha_{,} - 2\alpha\alpha')\eta' + \alpha'\eta_{,} + \alpha''\xi + \alpha'_{,}\eta = 0$$

$$\xi_{,,} + \alpha(\eta_{,,} - \xi'_{,}) - \alpha^2\eta'_{,} - \alpha_{,}\xi' + \alpha'\xi_{,} - 2\alpha\alpha_{,}\eta' + 2\alpha_{,}\eta_{,} + \alpha'_{,}\xi + \alpha_{,,}\eta = 0$$

$$\eta_\nu^{\mu-\nu+1}+\sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i\sum_0^{\nu}{}_k\binom{\mu-\nu+1}{i}\binom{\nu}{k}\varphi_k^i\,\xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1}-$$

$$-\sum_0^{\mu-\nu}{}_i\sum_0^{\nu+1}{}_k\binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1}\varphi_k^i\,\eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i}-$$

$$-\sum_0^{\mu-\nu}{}_i\sum_0^{\nu}{}_k\sum_0^{i}{}_\sigma\sum_0^{k}{}_\tau\binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau}\varphi_\tau^\sigma\varphi_{k-\tau}^{i-\sigma}\xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i}=0.$$

$$\eta_{\prime\prime\prime}+\varphi\xi_{\prime\prime\prime}+3\varphi_\prime\xi_{\prime\prime}+(3\varphi_{\prime\prime}+2\varphi\theta)\xi_\prime+2\theta\eta_\prime+\theta'\xi+\theta_\prime\eta=0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\theta'=\varphi_{\prime\prime\prime}+\theta\varphi_\prime+2\varphi\theta_\prime.$$

Die Bedingung $\gamma_\prime=\alpha''+\alpha\gamma'+\gamma\alpha'$ ist schon benutzt worden.

22.) $q,\ yq,\ y^2q,\ p.$

Invarianten.

$P_\nu^{\mu-\nu}=x_\nu^{\mu-\nu}$ $[\mu=1,2,3;\ \nu=0,\dots\mu.]$

$\Phi_\nu^{\mu-\nu}=\left(\frac{y'}{y_\prime}\right)_\nu^{\mu-\nu}$ $[\mu=0,1,2;\ \nu=0,\dots\mu.]$

$$\Theta=\frac{2y_\prime y_{\prime\prime\prime}-3y_{\prime\prime}^2}{2y_\prime^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-\nu}{}_i\sum_0^{\nu}{}_k\binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\left\{\varrho_k^{i+1}\xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i}+\varrho_{k+1}^i\eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i}\right\}=0$$

$$\eta_\nu^{\mu-\nu+1}+\sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i\sum_0^{\nu}{}_k\binom{\mu-\nu+1}{i}\binom{\nu}{k}\varphi_k^i\,\xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1}-$$

$$-\sum_0^{\mu-\nu}{}_i\sum_0^{\nu+1}{}_k\binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1}\varphi_k^i\,\eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i}-$$

$$-\sum_0^{\mu-\nu}{}_i\sum_0^{\nu}{}_k\sum_0^{i}{}_\sigma\sum_0^{k}{}_\tau\binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau}\varphi_\tau^\sigma\varphi_{k-\tau}^{i-\sigma}\xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i}=0.$$

$$\eta_{\prime\prime\prime}+\varphi\xi_{\prime\prime\prime}+3\varphi_\prime\xi_{\prime\prime}+(3\varphi_{\prime\prime}+2\varphi\theta)\xi_\prime+2\theta\eta_\prime+\theta'\xi+\theta'\eta=0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\theta'=\varphi_{\prime\prime\prime}+\theta\varphi_\prime+2\varphi\theta_\prime.$$

23.) $q, \; yq, \; y^2 q.$

Invarianten.

$$P_\nu^{\mu-\nu} = x_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0, 1, 2, 3; \; \nu = 0, 1, \ldots \mu.]$$

$$\Phi_\nu^{\mu-\nu} = \left(\frac{y'}{y_{,}}\right)_\nu^{\mu-\nu} \qquad [\mu = 0, 1, 2; \; \nu = 0, \ldots \mu.]$$

$$\Theta = \frac{2 y_{,} y_{,,,} - 3 y_{,,}^2}{2 y_{,}^2}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu}{i}\binom{\nu}{k} \left\{ \varrho_k^{i+1} \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} + \varrho_{k+1}^{i} \eta_{\nu-k}^{\mu-\nu-i} \right\} = 0$$

$$\eta_\nu^{\mu-\nu+1} + \sum_0^{\mu-\nu+1}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \binom{\mu-\nu+1}{i}\binom{\nu}{k} \varphi_k^i \xi_{\nu-k}^{\mu-\nu-i+1} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu+1}{}_k \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k} \frac{\nu-2k+1}{\nu-k+1} \varphi_k^i \eta_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} -$$

$$- \sum_0^{\mu-\nu}{}_i \sum_0^{\nu}{}_k \sum_0^{i}{}_\sigma \sum_0^{k}{}_\tau \binom{\mu-\nu}{i}\binom{\nu}{k}\binom{i}{\sigma}\binom{k}{\tau} \varphi_\tau^\sigma \varphi_{k-\tau}^{i-\sigma} \xi_{\nu-k+1}^{\mu-\nu-i} = 0.$$

$$\eta_{,,,} + \varphi \xi_{,,} + 3\varphi_{,} \xi_{,,} + (3\varphi_{,,} + 2\varphi\theta)\xi_{,} + 2\theta\eta_{,} + \theta'\xi + \theta_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\theta' = \varphi_{,,,} + \theta\varphi_{,} + 2\varphi\theta_{,}.$$

24.) $q, \; yq, \; p, \; xp.$

$$A = \frac{x_{,}}{x'}, \quad \Phi = \frac{y'}{y_{,}}, \quad \Gamma = \frac{x''}{x'}, \quad A', \quad A_{,}, \quad \Phi', \quad \Phi_{,}, \quad \Psi = \frac{y_{,,}}{y_{,}}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{,} + \alpha(\eta_{,} - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha_{,}\eta = 0$$

$$\eta' + \varphi(\xi' - \eta_{,}) - \varphi^2\xi_{,} + \varphi'\xi + \varphi_{,}\eta = 0$$

$$\xi'' + \alpha\eta'' + \gamma\xi' + (2\alpha' + \alpha\gamma)\eta' + \gamma'\xi + \gamma_{,}\eta = 0$$

$$\xi'_{,} + \alpha(\eta'_{,} - \xi'') - \alpha^2\eta'' + (\alpha_{,} - 2\alpha\alpha')\eta' + \alpha'\eta_{,} + \alpha''\xi + \alpha'_{,}\eta = 0$$

$$\xi_{,,} + \alpha(\eta_{,,} - \xi'_{,}) - \alpha^2\eta'_{,} - \alpha_{,}\xi' + \alpha'\xi_{,} - 2\alpha\alpha_{,}\eta' + 2\alpha_{,}\eta_{,} + \alpha'_{,}\xi + \alpha_{,,}\eta = 0$$

$$\eta'' + \varphi(\xi'' - \eta'_{,}) - \varphi^2\xi'_{,} + 2\varphi'\xi' - 2\varphi\varphi'\xi_{,} + \varphi_{,}\eta' - \varphi'\eta_{,} + \varphi''\xi + \varphi'_{,}\eta = 0$$
$$\eta'_{,} + \varphi(\xi'_{,} - \eta_{,,}) - \varphi^2\xi_{,,} + \varphi_{,}\xi' + (\varphi' - 2\varphi\varphi_{,})\xi_{,} + \varphi'_{,}\xi + \varphi_{,,}\eta = 0$$
$$\eta_{,,} + \varphi\xi_{,,} + (2\varphi_{,} + \varphi\psi)\xi_{,} + \psi\eta_{,} + \psi'\xi + \psi_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\gamma_{,} = \alpha'' + \alpha\gamma' + \gamma\alpha'$$
$$\psi' = \varphi_{,,} + \varphi\psi_{,} + \psi\varphi_{,}.$$

25.) $q\,,\ p\,,\ xp + cyq.$
$[c \neq 0\,,\ 1.]$

Invarianten.

$$A = \frac{x_{,}}{x'}\,,\quad \Phi = \frac{y'}{y_{,}}\,,\quad E = \log\frac{x'y_{,} - y'x_{,}}{(x')^{c+1}}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi_{,} + \alpha(\eta_{,} - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha_{,}\eta = 0$$
$$\eta' + \varphi(\xi' - \eta_{,}) - \varphi^2\xi_{,} + \varphi'\xi + \varphi_{,}\eta = 0$$
$$c\xi' + (c+1)\alpha\eta' - \eta_{,} - \varepsilon'\xi - \varepsilon_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingung.

$$\begin{aligned}
&(c+1)(1-\alpha\varphi)^3\{\varepsilon''\alpha - \varepsilon'_{,}(1+\alpha\varphi) + \varepsilon_{,,}\varphi\} + \\
&\quad + (c+1)(1-\alpha\varphi)^2\{-\alpha''[c-(c+1)\alpha\varphi] + \alpha'_{,}\varphi[(c-1) - \\
&\quad - (c+1)\alpha\varphi] + \alpha_{,,}\varphi^2 + \varphi''\alpha^2 - 2\varphi'_{,}\alpha + \varphi_{,,}\} + \\
&\quad + (c+1)(1-\alpha\beta)\{-\alpha'^2\varphi[(c-1)-(c+1)\alpha\varphi] + \\
&\quad + \alpha'\alpha_{,}\varphi^2[(c-3)-(c+1)\alpha\varphi] + 2\alpha_{,}^2\varphi^3\} + \\
&\quad + (c+1)(1-\alpha\varphi)^2\{(\alpha'-\varphi\alpha_{,})(\varepsilon'-\varphi\varepsilon_{,}) + (\alpha\varphi'-\varphi_{,})(\alpha\varepsilon'-\varepsilon_{,})\} + \\
&\quad + (c+1)(1-\alpha\beta)\{-\alpha'\varphi'\alpha[(c-3)-(c+1)\alpha\varphi] + \\
&\quad + \alpha'\varphi_{,}[(c-2)-(c+2)\alpha\varphi]\} + 4\alpha(1-\alpha\varphi)(\alpha\varphi'-\varphi_{,})^2 - \\
&\quad - \alpha_{,}\varphi'[(c+1) - (\zeta c+1)\alpha\varphi + 3(c-1)\alpha^2\varphi^2] + \\
&\quad + \alpha_{,}\varphi_{,}\varphi[(4c+1)-(c+4)\alpha\varphi] = 0.
\end{aligned}$$

26.) $q\,,\ yq\,,\ p.$

Invarianten.

$$P' = x',\quad P_{,} = x_{,}\,,\quad \Phi = \frac{y'}{y_{,}},\quad P'',\quad P'_{,}\,,\quad P_{,,}\,,\quad \Phi',\quad \Phi_{,}\,,\quad \Psi = \frac{y_{,,}}{y_{,}}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\varrho'\xi' + \varrho_{,}\eta' + \varrho''\xi + \varrho'_{,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi_{,} + \varrho_{,}\eta_{,} + \varrho'_{,}\xi + \varrho_{,,}\eta = 0$$
$$\eta' + \varphi(\xi' - \eta_{,}) - \varphi^2\xi_{,} + \varphi'\xi + \varphi_{,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi'' + \varrho_{,}\eta'' + 2\varrho''\xi' + 2\varrho'_{,}\eta' + \varrho'''\xi + \varrho''_{,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi'_{,} + \varrho_{,}\eta'_{,} + \varrho'_{,}\xi' + \varrho''\xi_{,} + \varrho_{,,}\eta' + \varrho'_{,}\eta_{,} + \varrho''_{,}\xi + \varrho'_{,,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi_{,,} + \varrho_{,}\eta_{,,} + 2\varrho'_{,}\xi_{,} + 2\varrho_{,,}\eta_{,} + \varrho'_{,,}\xi + \varrho_{,,,}\eta = 0$$
$$\eta'' + \varphi(\xi'' - \eta'_{,}) - \varphi^2\xi'_{,} + 2\varphi'\xi' - 2\varphi\varphi'\xi' + \varphi_{,}\eta' - \varphi'\eta_{,} + \varphi''\xi + \varphi'_{,}\eta = 0$$
$$\eta'_{,} + \varphi(\xi'_{,} - \eta_{,,}) - \varphi^2\xi_{,,} + \varphi_{,}\xi' + (\varphi' - 2\varphi\varphi_{,})\xi_{,} + \varphi'_{,}\xi + \varphi_{,,}\eta = 0$$
$$\eta_{,,} + \varphi\xi_{,,} + (2\varphi_{,} + \varphi\psi)\xi_{,} + \psi\eta_{,} + \psi'\xi + \psi_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\psi' = \varphi_{,,} + \varphi\psi_{,} + \psi\varphi_{,}.$$

27.) $q\,,\ yq.$

Invarianten.

$$P = x\,,\quad P' = x'\,,\quad P_{,} = x_{,}\,,\quad \Phi = \frac{y'}{y_{,}}\,,\quad \Psi = \frac{y_{,,}}{y_{,}}\,,\quad P''\,,\ P'_{,}\,,\ P_{,,}\,,\ \Phi'\,,\ \Phi_{,}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\varrho'\xi + \varrho_{,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi' + \varrho_{,}\eta' + \varrho''\xi + \varrho'_{,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi_{,} + \varrho_{,}\eta_{,} + \varrho'_{,}\xi + \varrho_{,,}\eta = 0$$
$$\eta' + \varphi(\xi' - \eta_{,}) - \varphi^2\xi_{,} + \varphi'\xi + \varphi_{,}\eta = 0$$
$$\eta'' + \varphi\xi_{,,} + (2\varphi_{,} + \varphi\psi)\xi_{,} + \psi\eta_{,} + \psi'\xi + \psi_{,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi'' + \varrho_{,}\eta'' + 2\varrho''\xi' + 2\varrho'_{,}\eta' + \varrho'''\xi + \varrho''_{,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi'_{,} + \varrho_{,}\eta'_{,} + \varrho'_{,}\xi' + \varrho''\xi_{,} + \varrho_{,,}\eta' + \varrho'_{,}\eta_{,} + \varrho''_{,}\xi + \varrho'_{,,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi_{,,} + \varrho_{,}\eta_{,,} + 2\varrho'_{,}\xi_{,} + 2\varrho_{,,}\eta_{,} + \varrho'_{,,}\xi + \varrho_{,,,}\eta = 0$$
$$\eta'' + \varphi(\xi'' - \eta'_{,}) - \varphi^2\xi'_{,} + 2\varphi'\xi' - 2\varphi\varphi'\xi_{,} + \varphi_{,}\eta' - \varphi'\eta_{,} + \varphi''\xi + \varphi'_{,}\eta = 0$$
$$\eta'_{,} + \varphi(\xi'_{,} - \eta_{,,}) - \varphi^2\xi_{,,} + \varphi_{,}\xi' + (\varphi' - 2\varphi\varphi_{,})\xi_{,} + \varphi'_{,}\xi + \varphi_{,,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$\varrho' = (\varrho)'$; $\varrho_{,} = (\varrho)_{,}$ sind beide schon benutzt worden.

$$\psi' = \varphi_{,,} + \varphi\psi_{,} + \psi\varphi_{,}.$$

28.) $p, \; q, \; xp + yq.$

Die sämtlichen Invarianten und Definitionsgleichungen dieses Typus bekommen wir, wenn wir in denen des 25. Typus die Constante $c = 1$ setzen.

29.] $q, \; xp + yq.$

Invarianten.

$$P = \log \frac{x'}{x}, \quad A = \frac{x_,}{x'}, \quad \Phi = \frac{y'}{y_,}, \quad E = \log \frac{y_,}{x'}.$$

Definitionsgleichungen.

$$\xi' + \alpha\eta' + \varrho'\xi + \varrho_,\eta = 0$$
$$\xi_, + \alpha(\eta_, - \xi') - \alpha^2\eta' + \alpha'\xi + \alpha_,\eta = 0$$
$$\eta' + \varphi(\xi' - \eta_,) - \varphi^2\xi_, + \varphi'\xi + \varphi_,\eta = 0$$
$$\xi' - \varphi\xi_, + \alpha\eta' - \eta_, - \varepsilon'\xi - \varepsilon_,\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$\varrho_, = \alpha' + \alpha\varrho'$$
$$\varepsilon' + \varepsilon\alpha' = \varepsilon\varphi_, + \varphi\varepsilon_, + \varepsilon\varphi\alpha_,.$$

30.) $p, \; q.$

Invarianten.

$$P' = x', \quad P_, = x_,, \quad Y' = y', \quad Y_, = y_,.$$

Definitionsgleichungen.

$$\varrho'\xi' + \varrho_,\eta' + \varrho''\xi + \varrho_,'\eta = 0$$
$$\varrho'\xi_, + \varrho_,\eta_, + \varrho_,'\xi + \varrho_{,,}\eta = 0$$
$$v'\xi' + v_,\eta' + v''\xi + v_,'\eta = 0$$
$$v'\xi_, + v_,\eta_, + v_,'\xi + v_{,,}\eta = 0$$

Die Integrabilitätsbedingungen $(\varrho')_, - (\varrho_,)' = (v')_, - (v_,)' = 0$ sind schon benutzt worden.

31.) $q.$

Invarianten.

$$P = x, \quad P' = x', \quad P_, = x_,, \quad Y' = y', \quad Y_, = y_,.$$

Definitionsgleichungen.

$$(\varrho)'\xi + (\varrho)_{,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi' + \varrho_{,}\eta' + (\varrho')'\xi + (\varrho')_{,}\eta = 0$$
$$\varrho'\xi_{,} + \varrho_{,}\varrho_{,} + (\varrho_{,})'\xi + (\varrho_{,})_{,}\eta = 0$$
$$v'\xi' + v_{,}\eta' + (v')'\xi + (v')_{,}\eta = 0$$
$$v'\xi_{,} + v_{,}\eta_{,} + (v_{,})'\xi + (v_{,})_{,}\eta = 0.$$

Integrabilitätsbedingungen.

$$(\varrho)_{,}(\psi\varphi' - \varphi\psi') - (\varrho)'(\psi\varphi_{,} - \varphi\psi_{,}) = 0,$$

wo $\varphi \equiv (\varrho')_{,} - (\varrho_{,})'$, $\psi = (v')_{,} - (v_{,})'$ bedeuten.

Lebenslauf.

Ich, Arthur Graham Hall, evangelischer Confession, wurde am 9. December 1865 als Sohn des städtischen Schulsuperintendenten Clark Benedict Hall zu Memphis, Michigan, in den Vereinigten Staaten von Nordamerika, geboren. Nachdem ich den Elementarunterricht auf den Bürgerschulen zu Oxford, Michigan und Wayne, Michigan, erhalten hatte, war ich Schüler in den Gymnasien zu Wayne, Michigan und Hastings, Michigan. Nach erlangtem Maturitätszeugnis bezog ich September 1883 die Universität Michigan und machte im Juni 1887 mein Baccalaureatsexamen.

Von September 1887 bis Juni 1891 war ich Mathematiklehrer und Rector des Gymnasiums zu La Porte, Indiana, und von Februar 1893 bis Juni 1894 Lehrer der Mathematik und Physik an dem Gymnasium zu Grand Rapids, Michigan.

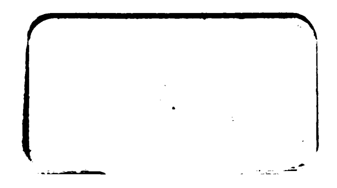
Von September 1891 bis Februar 1893, und seit September 1894 bin ich »Instructor« der Mathematik an der Universität Michigan. Von September 1894 bis Juni 1900 war ich auch Student in der »Graduate School« der Universität Michigan und hörte die Vorlesungen und nahm teil an den Seminaren und Übungen der Herren Professoren Beman, Carhart, Markley, Patterson und Ziwet.

Oktober 1900 bezog ich die Universität Leipzig, um mich dem Studium der Mathematik zu widmen. Während meiner hiesigen Studienzeit hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren und Docenten Boltzmann, Engel, Hausdorff, Hölder, Kowalewski und Neumann, und nahm teil an den Seminaren und Übungen der Herren Professoren Boltzmann, Engel und Kowalewski.

Meinen obengenannten hochverehrten Lehrern bin ich aufrichtigen Dank schuldig für alles das, was mir durch ihre Anregung zu teil wurde.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.






3 2044 102 93